DOTTORATO DI RICERCA
in
Storia e Didattica delle Matematiche, della Fisica e della Chimica

Ciclo XXII

Consorzio tra Università Bologna, Università Catania, Università di Bratislava (Slovacchia), Università Nitra (Slovacchia), Università di Napoli “Federico II”, Università di Alicante (Spagna), Università di Pavia, Università di Palermo, CIRE (Centro Interdipartimentale Ricerche Educative, Università di Palermo)

SEDE AMMINISTRATIVA: **UNIVERSITÀ DI PALERMO**

Le rappresentazioni del numero: un confronto tra contesto algebrico e contesto tecnologico

Dottorando: Luigi Menna

Coordinatore: Prof. Aldo Brigaglia

Tutor: Prof. Angela Pesci

Co-Tutor: Prof. Maria Alessandra Mariotti

TESI DI DOTTORATO DI RICERCA
SETTORE SCIENTIFICO DISCIPLINARE MAT/04
Palermo, 2012

Sommario

CAPITOLO 1. Introduzione

L'importanza di una corretta rappresentazione del numero in ambito scolastico viene spesso sottaciuta (Kaput, 1997) con la conseguenza che le diverse sue formalizzazioni possano apparire agli studenti equivalenti o confuse.

La rappresentazione di un numero porta con sé diversi significati che dipendono dal contesto all'interno del quale viene scritto e dallo strumento utilizzato per darne rappresentazione. Di conseguenza la lettura di un numero deve necessariamente assumere un significato diverso e dipendente dal contesto nel quale avvenga, per esempio in ambito fisico o matematico; nel primo caso, ad esempio, si avrà probabilmente a che fare con una misura, nel secondo caso con un numero puro.

Attualmente è giustamente attribuita in ambito pedagogico e didattico enorme importanza ai temi dell'interdisciplinarietà e al ruolo della matematica all'interno del mondo reale. È comune la situazione in cui uno studente si trovi, per esempio, a dover risolvere un problema fisico con gli strumenti dell'algebra.

Tuttavia, quando gli studenti cominciano lo studio della fisica incontrano – all'interno dei libri di testo da me presi in visione, nell'ambito della presente ricerca – un capitolo introduttivo volto a spiegare in che modo debba avvenire la scrittura della misura esemplificando le sue rappresentazioni.

Per esempio, nella figura che segue[1] (figura 1), viene descritto come si deve rappresentare il numero relativo ad una certa misura.

[1] La figura è tratta dal libro di testo di Caforio, Ferilli, 2004, Fisica, Le Monnier, Firenze, p. 47.

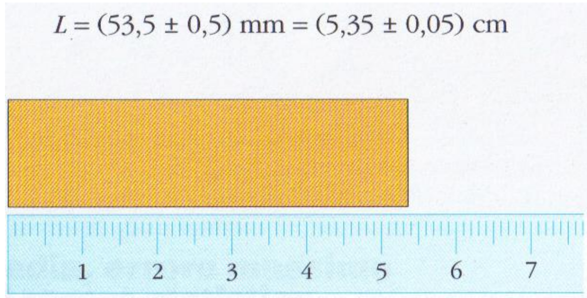


Figura 1

In diversi libri di fisica viene precisato il valore della rappresentazione dei numeri specificando il tipo di informazione, aggiunta o eliminata, per ogni sua cifra decimale.

Non viene invece descritto nulla di simile nei libri di testo di matematica. Vengono (non sempre) introdotti gli insiemi dei numeri naturali, razionali e reali con conseguente definizione di continuità e densità di un insieme.

Tuttavia appare imprecisata la distinzione tra rappresentazioni diverse di uno stesso numero.

Per parte mia, nel corso di questa tesi opererò la seguente distinzione tra:

- rappresentazione esatta,
- rappresentazione approssimata.

La prima identifica un ben preciso numero e, in generale, è quella che viene indicata dai libri di testo quando si richiede di risolvere un problema od un esercizio; si tratta di quei numeri che si ottengono, per esempio, attraverso una successione di passaggi algebrici. Non è richiesta alcuna approssimazione anche se si ottengono soluzioni irrazionali o numeri periodici con infinite cifre decimali. Il contratto didattico (Brousseau, 1980) solitamente impone agli studenti questo tipo di notazione.

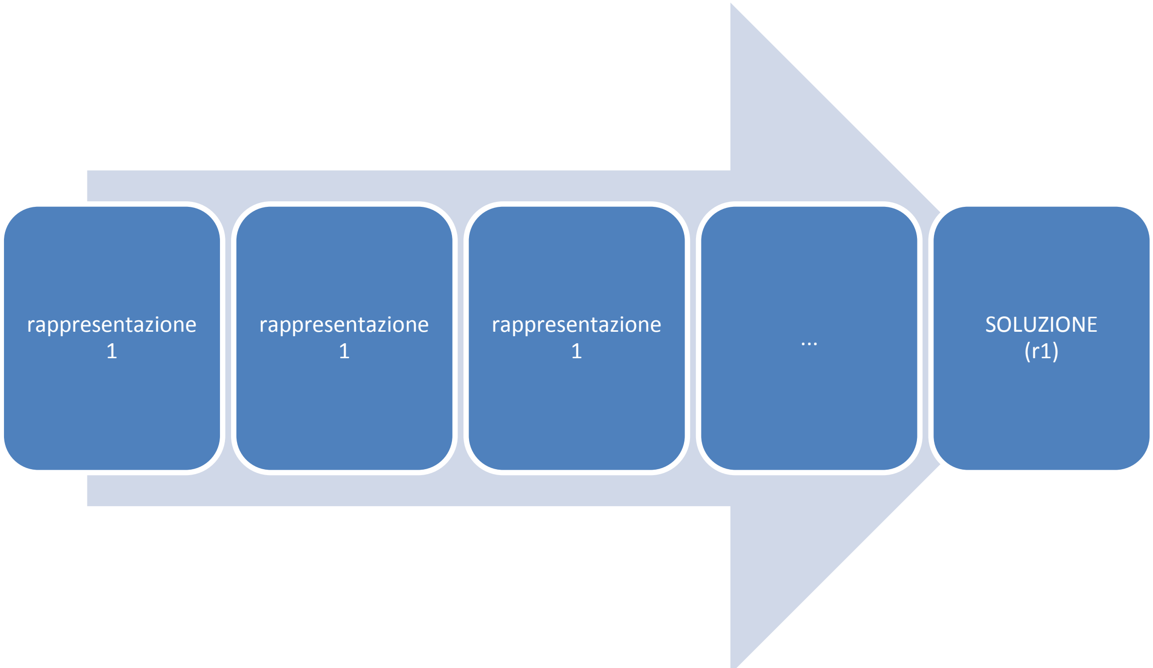
Invece, la rappresentazione approssimata di un numero (sia esso una frazione o un irrazionale) è richiesta solitamente negli esercizi di fisica o in qualche esercizio in cui si vuole modellizzare una situazione reale. Tuttavia non sempre è chiaro in che modo vengano approssimati questi numeri. In altre parole è spesso possibile trovare all'interno di alcuni libri di testo passaggi molto veloci in cui, senza che venga spiegato nulla, si legge $\sqrt{2}=1,41$ oppure $\pi=3,14$ nell'esigenza appunto di dovere approssimare.

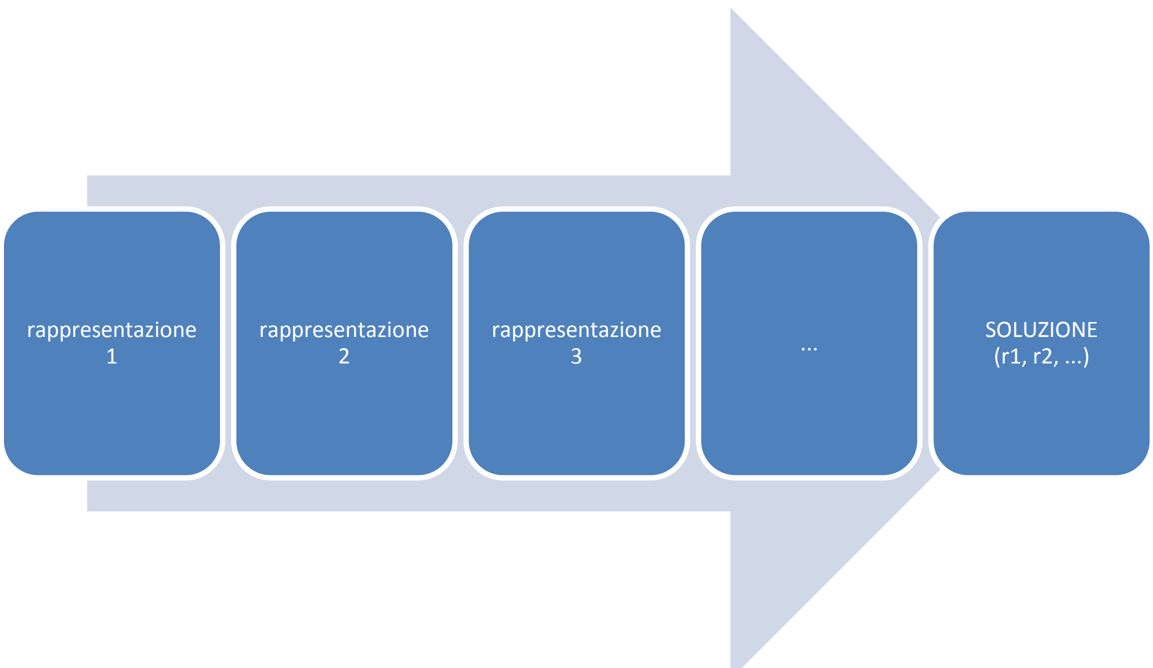
Il passaggio tra queste due rappresentazioni è l'oggetto della ricerca che si vuole ivi descrivere.

Ogni rappresentazione porta con sé significati del numero la cui distinzione potrebbe risultare non chiara o addirittura irrilevante. Ogni significato conduce lo studente a risolvere i problemi in modo diverso. Il numero inteso come soluzione di un problema è a sua volta influenzato dallo strumento che viene utilizzato per determinarlo.

Finché, durante il processo di risoluzione del compito, lo strumento rimane sempre lo stesso (per esempio quello algebrico) e la rappresentazione del numero appare coerentemente identica non è facile, per l'insegnante o per l'alunno, evidenziare alcuna ambiguità.

Se invece si utilizzano strumenti diversi e di conseguenza sistemi di rappresentazioni diversi, è possibile dunque avere rappresentazioni diverse dei numeri in gioco la cui interpretazione può condurre a ragionamenti e dunque a soluzioni differenti.





Nel corso di questa tesi verrà solitamente associato allo strumento algebrico quello legato ad un software per cui opererò anche la distinzione tra:

- numero elaborato all’interno dell’algebra
- numero in un software.

Dunque, se uno studente è messo nelle possibilità di operare su uno stesso problema usando strumenti diversi, può essere importante domandarsi quale sia il ruolo dell’approssimazione del calcolatore: alcuni software restituiscono il valore approssimato ad un certo numero di cifre dopo la virgola, altri danno il valore irrazionale esatto. Epistemologicamente il significato di numero nello strumento digitale è profondamente diverso da quello che viene imparato quando si studiano i numeri reali. Ciò ha anche ripercussioni per quel che riguarda il rapporto delle matematica con le altre scienze sperimentali.

I software nelle indicazioni nazionali e lo stato delle scuole italiane

Il mondo della ricerca in didattica della matematica da tempo riflette di quanto e come possa incidere l’uso di strumenti e, in particolare, di tecnologie digitali nel mondo della scuola. Anche il mondo della scuola dal canto suo ha a suo tempo già previsto delle soluzioni per integrare l’informatica all’interno delle discipline scolastiche. Sin dal principio la matematica – o più precisamente i professori di matematica – è stata vista come un viatico per l’apertura del mondo informatico agli studenti: infatti nel 1985: la prima fase del Piano Nazionale dell'Informatica (PNI), nella quale l'introduzione dell'informatica aveva il compito di rinnovare gli insegnamenti della matematica (soprattutto) e della fisica e, in particolare, di rendere maggiormente sostenibile l'attività di formalizzazione; nel 1993: la seconda fase del PNI estendeva la formazione all'uso delle tecnologie informatiche alle discipline linguistiche del biennio.

A tutt’oggi, le recenti indicazioni nazionali puntualizzano ancora una volta l’attenzione verso il mondo digitale e in vari punti di esse si trovano riferimento a strumenti informatici e a modelli matematici.

Tra gli obiettivi individuati dalle indicazioni nazionali comuni ad ogni percorso liceale si legge:

- Essere in grado di utilizzare criticamente strumenti informatici e telematici nelle attività di studio e di approfondimento,
- comprendere la valenza metodologica dell’informatica nella formalizzazione e modellizzazione dei processi complessi e nell’individuazione di procedimenti risolutivi.[2]

In particolare per quel che riguarda i licei scientifici bisogna puntare su:

- il concetto di modello matematico e un’idea chiara della differenza tra la visione della matematizzazione caratteristica della fisica classica (corrispondenza univoca tra matematica e natura) e quello della modellistica (possibilità di rappresentare la stessa classe di fenomeni mediante differenti approcci);
- costruzione e analisi di semplici modelli matematici di classi di fenomeni, anche utilizzando strumenti informatici per la descrizione e il calcolo.[3]

E ancora, sempre secondo le indicazioni nazionali:

- Gli strumenti informatici oggi disponibili offrono contesti idonei per rappresentare e manipolare oggetti matematici. L'insegnamento della matematica offre numerose

[2] Nota introduttiva alle Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento. p. 7 http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010///indicazioni_nuovo_impaginato/_decreto_indicazioni_nazionali.pdf

[3] Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento in relazione alle attività e agli insegnamenti compresi nel piano degli studi previsto per il liceo artistico. p. 22 http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010///indicazioni_nuovo_impaginato/_decreto_indicazioni_nazionali.pdf

> occasioni per acquisire familiarità con tali strumenti e per comprenderne il valore metodologico. Il percorso, quando ciò si rivelerà opportuno, favorirà l'uso di questi strumenti, anche in vista del loro uso per il trattamento dei dati nelle altre discipline scientifiche. L'uso degli strumenti informatici è una risorsa importante che sarà introdotta in modo critico, senza creare l'illusione che essa sia un mezzo automatico di risoluzione di problemi e senza compromettere la necessaria acquisizione di capacita di calcolo mentale.[4]

L'attenzione del Ministero della Pubblicazione Istruzione verso le nuove tecnologie applicate alla didattica della matematica appare evidente in queste righe.

Provo ad evidenziare in merito alcuni aspetti a mio parere critici: la formalizzazione e la modellizzazione di un fenomeno sono due aspetti fortemente distinti tra loro ma sono messi accomunati dal medesimo destino: l'informatica è importante in quanto presuppone queste due operazioni. Tenendo presente che le operazioni del formalizzare e modellizzare appaiono come verbi soltanto nella parte delle indicazioni che si riferisce alla fisica e che sono usati quasi come sinonimi, varrebbe la pena esplicitare in che modo l'informatica possa mettere insieme i due aspetti e se ci si riferisce sempre all'insegnamento della fisica.

La creazione di modelli sembra invece essere oggetto di studio della matematica ma fa riferimento sempre a contenuti di fisica. In questo senso l'informatica potrebbe regalare qualche contesto in più, dall'economia alla teoria dei giochi, dallo studio di una struttura linguistica alla geometria.

[4] Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento in relazione alle attività e agli insegnamenti compresi nel piano degli studi previsto per il liceo artistico. p. 24 http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010///indicazioni_nuovo_impaginato/_decreto_indicazioni_nazionali.pdf

Infine appare ancora ambiguo il rapporto di fiducia tra il mondo della scuola e l'utilizzo dell'informatica, in quanto quest'ultimo potrebbe compromettere "la necessaria acquisizione di capacità di calcolo mentale"

Appare evidente peraltro l'intenzione di dotare le scuole di strumentazioni informatiche: dalla Lavagna Interattiva Multimediale (LIM) alla calcolatrice programmabile – che potrà essere usata a partire dall'esame di stato del 2012 – nonché l'attenzione riservata alla formazione che viene impartita ai docenti di ogni disciplina.

Dopo la débâcle dei risultati Ocse Pisa che hanno messo in luce – anche se non individuato – i problemi legati alla didattica in Italia, a livello istituzionale ci si è ancora posti il problema di come assumere quella "mathematical literacy" che compare appunto come *la capacità di un individuo di identificare e comprendere il ruolo che la matematica gioca nel mondo reale, di operare valutazioni fondate e di utilizzare la matematica e confrontarsi con essa in modi che rispondono alle esigenze della vita di quell'individuo in quanto cittadino che esercita un ruolo costruttivo, impegnato e basato sulla riflessione*. Operare nel mondo reale implica dunque che lo studente abbia a che fare con una matematica che sia contestualizzata e sensata. In questo senso fare riferimento ai modelli e all'uso degli strumenti informatici diventa importante proprio in quanto viene resa esplicita la consapevolezza dei vantaggi che il loro uso apporterebbe all'insegnamento/apprendimento delle matematiche. Ciò anche al fine di evitare un approccio ingenuo e "taumaturgico" all'uso delle tecnologie, poiché come è stato giustamente rilevato:

> "la tecnologia di per sé non può portare a un mutamento educativo. Spesso l'assunto alla base dell'impiego di una certa tecnologia per scopi educativi è quello che se la tecnologia che si usa è *buona*, l'educazione cambierà necessariamente in meglio. Questo modo di vedere le cose porta a presentare una tecnologia come semplice comoda interessante da usare, e non mette in luce che un ambiente di apprendimento

> basato sul calcolatore possa essere complesso, necessiti di un tempo considerevole per essere appreso e utilizzato in modo proficuo, implichi la ridefinizione dei contenuti e dei metodi stessi di insegnamento e del ruolo dell'insegnante" (Bottino & Chiappini, 1997)

Ecco allora che gli strumenti digitali diventano un modo per riflettere su alcune dinamiche implicite ai processi di insegnamento/apprendimento all'interno delle aule scolastiche.

A scuola l'uso delle tecnologie è ancora molto differenziato: si va dagli insegnanti che dispongono di aule con le LIM e connessione ad internet a quelli che hanno a disposizione aule di informatiche con computer per ogni due o tre studenti, fino a quelli che non hanno accesso ad alcuno strumento. Il fatto che il computer sia pervasivamente entrato a far parte di ogni campo del sapere umano fa sì che anche la matematica possa essere mediata attraverso i linguaggi specifici del calcolatore. Esemplificando si può far velocemente riferimento alla simulazione al computer di fenomeni osservati e quindi modellizzati tramite algoritmi.

Comune è comunque l'atteggiamento di molti insegnanti di interpretare un software come un'occasione per recuperare o approfondire le abilità cognitive non ancora raggiunte degli studenti. Come segnala Barozzi (Barozzi ,1995 p. 7) «è inutile fare finta che certi strumenti non esistano», anche perché «la pressione del mondo del lavoro, delle famiglie, dei produttori, ecc. costringerà anche i più riluttanti a tenere conto dell'esistente»; infine lo studioso avanza una raccomandazione a mio avviso del tutto condivisibile: «è meglio precedere questo movimento e dirigerlo verso obiettivi corretti e non riduttivi». Pertanto, se l'uso del software viene espresso come ancillare alla normale pratica e non viene invece integrato non si fa un buon servizio né all'efficacia del processo educativo né allo strumento digitale in uso. In altre parole, l'uso estemporaneo della risorsa informatica, che risulta ancora avulsa dalla pratica didattica percepita come ordinaria dagli studenti, rischia di non avere alcun vantaggio.

Degna di nota inoltre la recentissima notizia di una legge che dovrebbe essere valida dal 2012 che prevederebbe per la prima volta in Italia la possibilità di servirsi delle calcolatrici programmabili durante la prova di matematica dell'Esame di Stato.

Queste rappresentano strumenti di sofisticata tecnologia, e richiedono un certo tempo affinché lo studente impari ad utilizzarle in modo efficiente. A causa della complessità e delle potenzialità di tali calcolatrici, sarà necessario più tempo agli studenti prima che possano essere pienamente consapevoli delle loro funzioni.

In questa prospettiva vale la pena mettere in evidenza alcune caratteristiche di queste macchine (Kissane, 1995):

- una calcolatrice grafica contiene tutte le funzioni tradizionali di una calcolatrice scientifica. L'aspetto esteriore è in effetti quella di una calcolatrice super in modo da potere essere utilizzata a più livelli e secondo competenze ed esigenze diverse;
- può tracciare con estrema facilità il grafico di una funzione ed automaticamente fornire informazioni quali l'intercetta, le intersezioni con gli assi;
- è possibile svolgere alcuni calcoli di derivate e integrali definite;
- alcune calcolatrici caricano tra i software pre-installati ambienti simili a Derive e Cabri-Geometre.

Se dunque solitamente, non è possibile allestire un'aula scolastica con un computer su ogni banco a disposizione per ogni studente, sicuramente è possibile pensare ad un'alternativa con le calcolatrici programmabili.

Concludendo, nel corso della mia ricerca si prende spunto dalle considerazioni appena fatte per approfondire in particolar modo il ruolo che riveste la tecnologia informatica nella veste di mediatore tra un mondo fisico legato a delle esperienze più o meno concrete (come abbiamo visto evocate più volte nelle Indicazioni Nazionali) a quello puramente matematico. Si tenterà di fare questo mettendo in luce il rapporto tra la finitezza di un numero ricavato da una esperienza concreta e il concetto di numero che viene usualmente utilizzato nella pratica didattica comune in particolare nel contesto algebrico.

CAPITOLO 2. Quadri di riferimento

Il quadro di riferimento vigotskiano

E' ormai ampiamente riconosciuta l'importanza e l'ampiezza dell'uso delle tecnologie nella pratica didattica quotidiana. Tali strumenti offrono infatti una potenzialità che altri non riescono ad esprimere:

> "… its potential for such transformative change stems in no small part from its ability to be reconstructed by teachers and learners themselves. This is what Seymour Papert referred to as 'protean' quality of the computer: like Proteus, it can be changed (even change itself) into any number of forms." (Noss, 2001, p .22).

Per cercare di inquadrare correttamente l'analisi cognitiva della funzione di uno strumento (anche tecnologico) appare utile il quadro di riferimento della teoria di Vygotskij (Vygotskij, 1978).
Com'è noto infatti il quadro vigotskiano è caratterizzato da tre costrutti fondamentali (Bussi & Maschietto, 2006):

- la zona di sviluppo prossimale;
- la internalizzazione o interiorizzazione;
- la mediazione semiotica.

La zona di sviluppo prossimale è il luogo metaforico in cui un individuo svolge un'attività di problem solving in collaborazione con un altro soggetto.

> Ciò che l'alunno riesce a fare in cooperazione oggi, potrà farlo da solo domani. Pertanto, l'unica buona forma di istruzione è quella che anticipa lo sviluppo e lo

> conduce; essa non dovrebbe essere indirizzata tanto alle forme mature, quanto a quelle che stanno maturando[5].

Quando l'apprendimento sostenuto dall'interazione sociale con l'adulto si interiorizza, diventa parte dello sviluppo individuale del bambino. È in questo modo che avviene il passaggio graduale dal livello interpsicologico a quello intrapsichico. L'internalizzazione è appunto il meccanismo per cui un processo esterno diviene interno. Quando un'azione esterna compiuta con l'aiuto di un adulto diventa interna allora può finalmente essere gestita autonomamente dall'allievo. È, in altre parole, la ricostruzione interna di un'operazione esterna (Vygotskij, 1978, p. 56).

> The geometric compass, embodied by the metal tool stored in every school-case, is no more a material object only: it becomes a mental object, whose use may be substituted or evoked by a body gesture (rotating hands or arms) or even by the product of the gesture, i.e. the drawn curve (Bussi & Boni, 2003).

All'interno di questo processo si possono distinguere due aspetti principali (Bussi & Mariotti, 2009):

- il processo esterno è essenzialmente **sociale**
- il processo di interiorizzazione è diretto da **processi semiotici**.

In questo senso, il sapere incorporato nello strumento, quando l'allievo è guidato da un adulto o da un suo pari con più esperienza, può essere esplicitato attraverso il linguaggio (in genere con un sistema di segni tra cui: linguaggio verbale e scritto, gesti, formalismi convenzionali, ecc.) e quindi può venire interiorizzato dallo studente.

[5] Vygotskij, Thought and language, 1962 p. 104, cit. in Dixon-Krauss nella trad. it. a p. 34.

Per Vygotskij i meccanismi semiotici, quali il linguaggio, i sistemi di conto, le tecniche mnemoniche, i prodotti artistici, la scrittura, i diagrammi, le mappe, ecc. (compresi gli strumenti psicologici), mediano le funzioni sociali ed individuali, e connettono l'interno con l'esterno, il sociale con l'individuale (Vygotskij, 1962).

Quindi lo strumento, oltre all'uso che se ne fa per portare a termine un determinato compito, contiene e rende accessibile un certo tipo di sapere.

Prima di procedere nel nostro ragionamento, può tornare utile chiarire la distinzione tra il concetto di strumento e quello di artefatto.

Wartofshy (1979) distingue tra i prodotti dell'attività umana tre tipi di artefatti.

- Gli artefatti primari sono ciò che serve nella produzione di "mezzi di esistenza e nella riproduzione della specie";
- Gli artefatti secondari "sono quelli usati nella conservazione e nella trasmissione delle abilità, dei modi di azione e della prassi acquisite e per mezzo delle quali è realizzata questa produzione. Gli artefatti secondari sono quindi rappresentazioni di questi modi di azione";
- Gli artefatti terziari sono rappresentati da tutto ciò che modellizza e formalizza il funzionamento degli artefatti secondari. Sono per esempio, le teorie matematiche che soggiacciono al funzionamento di certe macchine matematiche o, scendendo ancor più nel concreto, la geometria proiettiva in relazione alla costruzione di prospettografi.

Rabardel (1995) definisce "genesi strumentale" il processo che consente a chi ricorre all'artefatto di costruire lo strumento. Si possono distinguere due sottoprocessi complementari:

- strumentazione: orientata dall'artefatto verso il soggetto che tenta di acquisire i suoi schemi d'uso socialmente condivisi;

- strumentalizzazione: orientata dal soggetto verso l'artefatto al fine di renderlo utile ai propri scopi e include tutte azioni volte a selezionare funzioni, attribuire proprietà, trasformazioni, riproduzione dell'oggetto, ecc.

Verillon e Rabardel enfatizzano la differenza tra il manufatto (un oggetto materiale) e lo strumento inteso come un costrutto psicologico: "Lo strumento non esiste in sé, diventa uno strumento quando il soggetto è stato in grado di appropriarsene per se stesso e lo ha integrato con la sua attività" (Verillon e Rabardel, 1995, p. 84).

Sempre Rabardel (1999) sottolinea che, nel processo di genesi strumentale, colui che utilizza lo strumento può appropriarsi degli schemi d'uso di questo per applicarli ad un altro strumento arricchendolo.

Per parte sua, Norman (1993) introduce l'espressione "artefatti cognitivi" per indicare il ruolo che gli strumenti possono operare sul raffinamento delle potenzialità cognitive di chi li utilizza; tuttavia distingue:

- cognizione esperienziale che coinvolge azioni immediate indipendenti da fattori esterni per esemplificare semplici automatismi legati allo strumento che non ampliano le conoscenze disciplinari degli studenti;
- cognizione riflessiva che induce al confronto, a nuove problematiche, ecc.

Dunque, in base a questa distinzione, non è sufficiente che lo studente sappia utilizzare lo strumento, perché il suo impiego potrebbe presentarsi come mera "cognizione esperienzale".

A tal proposito conviene riferirsi a Meira (1998) nella sua distinzione tra strumenti *opachi*, che non consentono l'accesso ai saperi che contengono, e trasparenti che invece lo consentono.

Per chiarire meglio il concetto di artefatto trasparente può risultare utile la seguente definizione formulata da Rabardel:

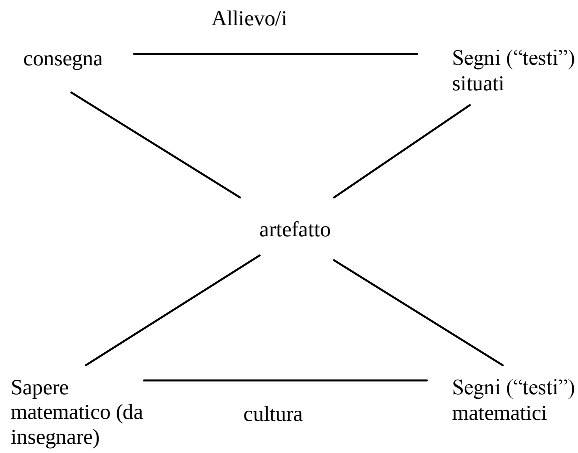
> La transparence d'un artefact doit donc être mise en relation avec les besoins en informations de l'utilisateur qui sont variables en fonction de ses buts, de ses compétences, des stratégies qu'il met en oeuvre pour les atteindre etc. C'est pourquoi nous proposons le concept de "transparence opérative" pour désigner les propriétés caractéristiques de l'artefact, pertinentes pour l'action de l'utilisateur, ainsi que la manière dont l'artefact les rend accessibles, compréhensibles, voire perceptibles pour l'utilisateur. La transparence opérative est un concept relationnel qui exprime la variabilité des besoins du sujet en "information" en fonction de la variabilité des situations d'action, de ses états et buts. Elle peut prendre des formes diverses: intelligibilité des transformations entre actions de commande et effets, mise en évidence des modalités de fonctionnement propres de l'instrument, auto-explication... (Rabardel, 1995).

Lo strumento informatico come mediatore semiotico

Se un artefatto incorpora un sapere non è dunque detto che quest'ultimo venga individuato correttamente. Ciò dipende dalla trasparenza dell'oggetto in esame. "In altri termini, "l'uso dello strumento diventa un problema didattico: come organizzare l'attività perché lo strumento divenga trasparente rispetto ad un determinato sapere." (Mariotti, 2004). La presenza di un insegnante è necessaria affinché tra i tanti significati mediati dallo strumento sia possibile ricavare un sapere utile dal punto di vista educativo.

I differenti segni, che emergono dall'attività svolta attraverso l'uso di uno strumento, devono venire elaborati socialmente sotto la guida dell'insegnante che ha appunto il compito di condurre i propri studenti affinché questi segni siano elaborati e interpretati nella forma di un sapere matematico.

Secondo Bussi e Mariotti (2009, p. 284), infatti, *l'insegnante utilizza l'artefatto come strumento di mediazione semiotica*. Le relazioni tra sapere, segni, artefatto, consegna e segni situati sono sintetizzate dal seguente schema (Bussi, Mariotti 2009, p. 283).



Uno strumento informatico, in quanto artefatto, si inserisce nel medesimo schema:

> "the calculator acts as a mediator for the action of students meeting new potentialities and constraints the students have to elaborate utilisation schemes, potentially rich in mathematics meanings" (Lagrange, 1999, p 200).

Dunque possiamo definire gli 'oggetti'[6] digitali che vengono manipolati concretamente dagli studenti attraverso i software, come *evocativi* (Hoyles and Noss, 1996, p.68).

---

[6] Per oggetti in generale possiamo intendere per esempio: carta / matita, il software installato nel computer in uso, dialoghi, gesti, ecc. Secondo la definizione di Chevallard (1991): «un emergente da un sistema di prassi dove sono manipolati oggetti materiali che si scompongono in differenti registri semiotici: registro orale, delle parole o delle espressioni pronunciate; registro gestuale; dominio delle iscrizioni, ovvero ciò che si scrive o si disegna (grafici, formule, calcoli, …), vale a dire, registro della scrittura

> To be effective, they must evoke something worthwhile in the learner, some rationale for wanting to explore with them, play with them, learn with them. They should evoke intuitions, current understandings and personal images – even preferences and pleasures.

Tuttavia non bisogna dimenticare che non si può comunque prescindere dal ruolo di mediatore rivestito dall'insegnante

> … the fact that students interact directly with the computer without direct input from teacher is not sufficient to guarantee the success. It is only by means of a negotiation which aims at the devolution to the student of the control of his or her interaction, that the quasi-isolation of the student of the control from his or her teacher is obtained. The didactical contract ruling the situation will allow it to be close enough to a situation 'free' of the teacher's influence. (Balacheff, 1993, p. 156)

Bisogna riconoscere però che non dirado i docenti offrono resistenze; come osservano diversi ricercatori, i docenti tendono a non voler perdere tempo nell'attività di descrizione delle possibilità e delle limitazioni di un software o di una calcolatrice. Poiché l'intenzione dell'insegnante è quella di concentrarsi soprattutto sui temi concettuali (Lagrange, 2005) lo studente di fatto finisce con l'usare il software senza conoscerne effettivamente vincoli e potenzialità (Guin & Trouche, 1998).

In un lavoro di Taylor, risalente ormai al 1980, si enfatizzano tre ruoli che potrebbero essere assegnati alla macchina. Alla luce di quanto detto proverò a riformularli nel seguente modo:

- Tutore: il computer si propone di accompagnare lo studente durante il processo di apprendimento. In questo caso lo studente che interagisce con il software segue una struttura prestabilita sulla base di competenze e abilità medie supposte acquisite. Il “software tutore” può imparare a conoscere lo studente in base alle risposte che questi fornisce in alcune parti del percorso stabilito a priori. Tuttavia, per quanto flessibile, un software non può certamente improvvisare e la metodologia di insegnamento non può essere personalizzata né adattabile ad un contesto di classe in particolare né, a maggior ragione si può adattare ad esigenze individuali. Inoltre, creare un software di questo tipo richiede molte ore di lavoro da parte del programmatore. Per questo motivo è raro che un docente produca personalmente un tale strumento che invece riceve dalla casa editrice del libro di testo adottato. In quest’ultimo caso si possono prevedere lezioni in cui lo studente venga affiancato contemporaneamente dal tutor elettronico e da quello ‘umano’.

- Strumento: è molto comune l’uso di software informatici sia da parte dei docenti che degli studenti autonomamente. Lo studente può usarlo per vari motivi: come calcolatrice, come risorsa per verificare la correttezza di un procedimento. Lo strumento informatico diventa particolarmente interessante allorquando lo studente debba imparare codici o linguaggi di programmazioni o procedure particolare per poter comunicare correttamente con esse. In poche parole, occorre distinguere se lo strumento è in grado di dare la risposta alla richiesta con pochi immediati passaggi (per esempio una operazione con la calcolatrice, il grafico di una funzione con *derive*) oppure se è in grado di risolvere problemi anche più complessi attraverso procedure e strategie (come la formulazione di congetture con *cabrì*, sequenze di passaggi logici con *DCProof*).
- Il computer da strumento diventa “tutee” allorquando lo studente debba dunque sforzarsi in qualche modo di comunicare con esso. La bontà del software non consiste nalla semplicità d’uso, quindi, e nemmeno

nell'essere amichevole nel senso di estremamente immediato. Per quanto alcuni software siano alcune volte assolutamente assimilabili ad alcune attività comuni del risolvere problemi matematici (disegnare una figura sul foglio, usare un foglio di calcolo per operare semplici operazioni aritmetici come fosse una calcolatrice un po' più complessa, strutturare passaggi algebrici), va sempre rilevato il fatto che uno studente – o in generale l'utente – debba in qualche modo adattarsi al linguaggio specifico che si sta usando. Da questo punto di vista un buon tutee è quello "non troppo evoluto", nel senso che può essere considerato "educativo" avere a che fare con un interlocutore che sia muto, rigido e col quale è possibile ripartire in qualsiasi momento da zero.

Considerazioni riguardanti l'uso di software da parte di studenti

Secondo la sintesi di Laborde (1990) un micromondo può essere definito come un ambiente informatico

- which provides a set of primitives (objects and activities) that can be combined in order to produce intended effects (computational, graphical, …),
- which offers a variety of different ways to obtain an intended effect,
- which embodies an abstract domain described in a model,
- which is open-ended insofar as the microworld can be used to produce a variety of different, perhaps only partially effects.

Secondo la Hoyles (1993) l'interazione tra studenti e un "micromondo" è utile per i seguenti motivi (Bottino & Chiappini, 1997) :

- rende le operazioni matematiche più concrete attraverso la manipolazioni di "evocative computational objects";

- rende necessaria la formalizzazione attraverso l'articolazione di astrazioni in situazione.

Delicato appare il momento della generalizzazione; occorre rendere coscienti gli studenti che le soluzioni che possono essere fornite da un calcolatore devono essere valide per ogni situazione.

In Noss, R. et alii (2009, p. 495) si identificano i seguenti aspetti:

1. students easily revert to 'pattern-spotting', which typically emphasises the numeric aspect of patterning at the expense of structure;
2. students fail to see beyond the particular and need considerable teacher support to maintain any focus on the general;
3. students' inexperience with mathematical language prevents them from expressing generality rigorously;
4. students' difficulties in making links between different representations impede the development of mathematical generalisations.

Particolarmente utili appaiono, in questo contesto, tali considerazioni perché utilizzeremo software come Geogebra o Cabrì – che possono sicuramente essere definiti micromondi – non tanto per la possibilità da questi offerta di *manipolare* gli oggetti rappresentati quanto, piuttosto, per la loro capacità di calcolo.

A tal scopo mi sembra utile in questo contesto ricordare come Fishbein (1998, p. 371) sintetizza le situazioni che gli studenti possono incontrare nel loro percorso di studio:

- una situazione in cui un'affermazione viene accettata intuitivamente e non si richiede alcuna dimostrazione;
- una situazione in cui un'affermazione viene accettata intuitivamente, ma in matematica essa viene anche formalmente dimostrata (coincidenza fra l'accettazione intuitiva e la conclusione logicamente basata);
- una situazione in cui un'affermazione non è intuitiva, auto-evidente, e può essere accettata solo sulla base di una dimostrazione formale;

- una situazione in cui si forma un conflitto fra l'interpretazione (soluzione) intuitiva riguardante un'affermazione e la risposta formalmente basata;
- una situazione in cui possono apparire due intuizioni conflittuali.

Da una parte appare quindi delicatissimo il momento della generalizzazione a partire dalle osservazioni ottenute attraverso un micromondo o più semplicemente ad un calcolatore.

Skemp (1976) distingue tra 'relational understanding' and 'instrumental understanding' in questo modo:

> By the former is meant what I have always meant by understanding, and probably most readers of this article: knowing both what to do and why. Instrumental understanding I would until recently not have regarded as understanding at all. It is what I have in the past described as 'rules without reasons', without realising that for many pupils and their teachers the possession of such a rule, and ability to use it, was why they meant by 'understanding'.

Concludendo, il software può avere un ruolo decisivo nel momento in cui si deve passare dalla soluzione intuitiva o evidente a quella formale e generalizzata; quello che è oggetto di questa tesi è il ruolo delle approssimazioni operate dal software – e non esplicitate da un insegnante o dal libro di testo – all'interno di questo processo risolutivo.

Registri linguistici

Il rapporto tra lo studente e il software spesso costringe quest'ultimo a passare da una rappresentazione ad un'altra di uno stesso oggetto matematico. Parlerò quindi di rappresentazioni semiotiche perché farò riferimento ad almeno quattro sistemi semiotici: la lingua naturale, il formalismo algebrico, la rappresentazione grafica e quella tabulare. In effetti, poiché non è possibile determinare un rinvio concreto di un oggetto matematico, colui che vuole manipolarlo è costretto a servirsi di rappresentazioni. D'altra parte, come sostiene D'Amore (2003), in matematica si parla più spesso di "oggetti matematici" che non di "concetti matematici", in quanto si studiano preferibilmente i primi piuttosto che i secondi; «la nozione di oggetto è una nozione che non si può non utilizzare dal momento in cui ci si interroga sulla natura, sulle condizioni di validità o sul valore della conoscenza» (Duval, 1998).

Dunque sarebbe molto più importante curare la rappresentazione dei segni piuttosto che valutare l'eventuale acquisizione del concetto da parte dello studente. D'altra parte lo stesso Vygotskij afferma che non esiste concetto senza segno «Tutte le funzioni psichiche superiori sono unite da una caratteristica comune superiore, quella di essere dei processi mediati, cioè di includere nella loro struttura, come parte centrale ed essenziale del processo nel suo insieme, l'impiego del segno come mezzo fondamentale di orientamento e di dominio dei processi psichici... L'elenco centrale [del processo di formazione dei concetti] è l'uso funzionale del segno, o della parola, come mezzo che permette all'adolescente di sottomettere al suo potere le proprie operazioni psichiche, di dominare il corso dei propri processi psichici...» (Vygotskij, 1962; nell'ed. francese, 1985, alle pagg. 150, 151, 157).

In effetti è molto comune riscontrare nei ragionamenti degli studenti quelli che Duval chiama *fenomeni di non* congruenza allorché non viene collegato correttamente un registro semiotico ad un altro.

«Nell'analisi del funzionamento cognitivo è importante distinguere bene:

- le trasformazioni di rappresentazioni che sono dei trattamenti (si resta nello stesso registro)
- le trasformazioni che sono delle conversioni (si cambia registro)» (Duval 1996).

> «Le rappresentazioni semiotiche sono rappresentazioni la cui produzione non è possibile senza la mobilitazione di un sistema semiotico: così le rappresentazioni semiotiche possono essere produzioni discorsive (in lingua naturale, in lingua formale) o non discorsive (figure, grafici, schemi,…). E questa produzione non risponde unicamente o necessariamente ad una funzione di comunicazione: può anche rispondere soltanto ad una funzione di oggettivazione (per sé stessi) o ad una funzione di trattamento.» (Duval, 1995 p. 252)

In altre parole "ci si riferisce ad un sistema di segni che permette di riempire le funzioni di comunicazione, trattamento e di oggettivazione, e non ci si riferisce invece a delle notazioni convenzionali che non formano un sistema". (D'Amore, 2011, p.6)

Dunque, per continuare a seguire i ragionamenti di Duval, «è considerando simultaneamente due registri di rappresentazione, e non ciascuno isolatamente, che si può analizzare il funzionamento cognitivo delle diverse attività matematiche».

In particolare nella nostra ricerca gli studenti coinvolti nelle sperimentazioni descritte nella ricerca proposta in questa tesi avranno la possibilità di visualizzare contemporaneamente – per mezzo di un software – registri semiotici diversi dello stesso oggetto. La visualizzazione assume dunque importanza primaria nella didattica della matematica (Vinner, 1992) e in particolare in relazione agli studenti che frequentano il liceo (Bagni, 1997).

CAPITOLO 3. Una analisi di libri di testo in Italia

La disponibilità di una gran quantità di strumenti da utilizzare induce lo studente a considerare l'ipotesi che un problema o un esercizio possa essere affrontato con strategie differenti e dunque anche attraverso l'uso degli strumenti tecnologici il cui accesso è oggi estremamente semplice e anzi incoraggiato dai libri di testo.

In questi casi, l'accavallarsi di una terminologia legata esclusivamente al contratto didattico (solitamente imposto dal libro di testo) (Brousseau, 1980) e di notazioni legate ad altri ambiti (per esempio la fisica o la stessa notazione legata ad un particolare software o ad una calcolatrice) sono causa di confusione per lo studente.

In effetti, l'uso di software o calcolatori permette realmente di risolvere lo stesso problema attraverso diverse strategie e dunque consente di pervenire a risultati che, seppur compatibili, risultano formalizzati in modi differenti.

L'uso di strumenti digitali rispetto alla figura geometrica o alla misura comporta un approccio dello studente necessariamente differente rispetto al solo uso di carta e penna. Di conseguenza, gli esercizi o i compiti assegnati all'allievo potrebbero coinvolgere differenti strategie e conoscenze rispetto a quelle coinvolte tradizionalmente (Bottino & Chiappini, 1997).

In Laborde (1993) si puntualizza che utilizzare strumenti informatici genera un nuovo *status* assunto dalle figure geometriche e, di conseguenza, viene a modificarsi il comportamento degli studenti di fronte a compiti geometrici svolti con la mediazione del computer.

Poiché è mia intenzione analizzare come l'uso di un particolare strumento possa modificare la percezione e il metodo di risoluzione di un esercizio/problema, cercherò di condurre una analisi comparata di cinque libri di testo, scelti in base alla loro diffusione scolastica. L'obiettivo dell'analisi è quello di mostrare in che modo (sia attraverso strumenti digitali sia attraverso altri strumenti) vengano calcolate – e conseguentemente rappresentate – le soluzioni di alcuni esercizi o problemi.

L'analisi dei diversi testi sarà affrontato rispetto ad uno stesso contenuto, solitamente sviluppato in uno stesso capitolo: si tratta degli elementi base di goniometria e trigonometria[7].

La goniometria si occupa di misure di angoli e di segmenti e di come sia possibile calcolare tali misure a o partire da elementi noti utilizzando alcune formule. Appare allora di fondamentale importanza considerare come vengono usati gli strumenti di calcolo, in quanto proprio attraverso di essi si può eseguire il calcolo di tali misure.

La domanda che ci siamo posti e alla quale si intende rispondere è dunque se e come strumenti diversi influenzino il modo di risolvere semplici problemi ed esercizi, in particolare se e come l'uso di rappresentazioni diverse del numero e conseguentemente di calcolo possano influenzare il processo risolutivo.

Le metodologie che vengono applicate dagli autori dei manuali al fine di calcolare la soluzione possono essere così riassunte:

a) si analizzano le relazioni geometriche a partire dall'analisi di figure geometriche e si utilizzano delle formule precedentemente acquisite e accettate; si procede dunque per via strettamente algebrica;
b) si misurano direttamente angoli e segmenti rappresentati in un disegno, utilizzando un righello o la carta millimetrata;
c) si utilizza la calcolatrice per eseguire i calcoli previsti dall'applicazione di una formula;
d) si utilizzano software didattici specifici (per esempio di geometria dinamica) al fine di calcolare misure di angoli e segmenti;
e) si utilizzano programmi di calcolo come excel al fine di applicare velocemente la stessa formula a dati diversi.

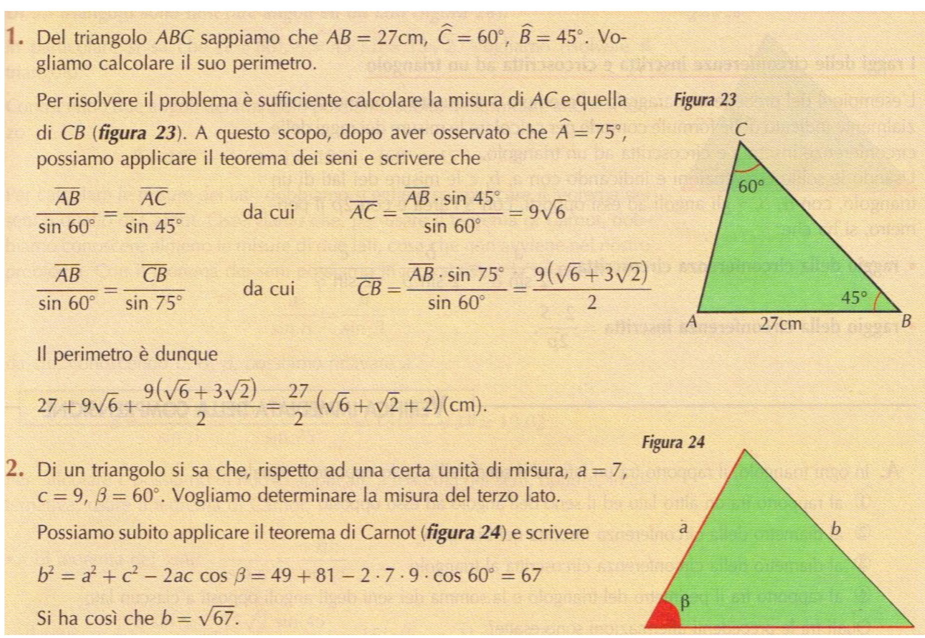
[7] La maggior parte dei libri di testo opera una separazione netta tra goniometria (in cui si trattano le funzioni goniometriche) e la trigonometria (le applicazioni alle figure geometriche).

Ognuno di questi metodi risolutivi porta con sé significati diversi rispetto al concetto di misura e di numero. “In effetti, per ogni strumento, si rende necessaria un'analisi particolare, per definire in modo chiaro le sue potenzialità educative e per costruire una ingegneria didattica conseguente” (Mariotti, 2002).

Per ritornare dunque all’analisi di testo che segue, vengono presi in esame alcuni esempi di risoluzioni di esercizi in cui viene chiesto di calcolare misure di oggetti matematici.

Esempio 1 (metodo a)

Il seguente esercizio (figura 2), tratto da un noto libro di testo in adozione nei licei scientifici, mi sembra interessante in quanto presenta come si possa arrivare alla misura di un lato attraverso l’uso di una formula precedentemente studiata.



1. Del triangolo ABC sappiamo che $AB = 27\text{cm}$, $\hat{C} = 60°$, $\hat{B} = 45°$. Vogliamo calcolare il suo perimetro.

Per risolvere il problema è sufficiente calcolare la misura di AC e quella di CB (***figura 23***). A questo scopo, dopo aver osservato che $\hat{A} = 75°$, possiamo applicare il teorema dei seni e scrivere che

$$\frac{\overline{AB}}{\sin 60°} = \frac{\overline{AC}}{\sin 45°} \quad \text{da cui} \quad \overline{AC} = \frac{\overline{AB} \cdot \sin 45°}{\sin 60°} = 9\sqrt{6}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\sin 60°} = \frac{\overline{CB}}{\sin 75°} \quad \text{da cui} \quad \overline{CB} = \frac{\overline{AB} \cdot \sin 75°}{\sin 60°} = \frac{9(\sqrt{6}+3\sqrt{2})}{2}$$

Il perimetro è dunque

$$27 + 9\sqrt{6} + \frac{9(\sqrt{6}+3\sqrt{2})}{2} = \frac{27}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2}+2)(\text{cm}).$$

Figura 23

2. Di un triangolo si sa che, rispetto ad una certa unità di misura, $a = 7$, $c = 9$, $\beta = 60°$. Vogliamo determinare la misura del terzo lato.

Possiamo subito applicare il teorema di Carnot (***figura 24***) e scrivere

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos\beta = 49 + 81 - 2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \cos 60° = 67$$

Si ha così che $b = \sqrt{67}$.

Figura 24

Figura 2

L’esercizio (così come tanti esercizi che ne condividono la funzione) si trova in coda al paragrafo che ha appena spiegato un certo contenuto da applicare attraverso una formula.
L’autore del testo, nel proporre questi esercizi, sembra non abbia alcuna intenzione di creare una situazione problematica, bensì di verificare se lo studente sia in grado di usarle la formula studiata (nel caso specifico la formula che si ricava dal teorema dei seni o dal teorema di Carnot) inserendo i dati al posto giusto. I processi descritti dal libro giungono entrambi attraverso **passaggi algebrici** alla conclusione che il lato del triangolo misura oppure . L’immagine a lato dello svolgimento dell’esercizio non serve a null’altro se non a sistemare graficamente i numeri esplicitati nel testo del problema e facilitare il ricordo della formula. Il procedimento descritto utilizza esclusivamente **rappresentazioni algebriche del numero esatte**.

Esempio 2 (metodo b)

Il problema seguente riguarda il calcolo del seno di un angolo che non sia tra quelli noti 30, 45 e 60 gradi. Il testo propone di disegnare sulla carta millimetrata il cerchio goniometrico e usare i quadretti per ricavare la misura del seno di 58 gradi (figura 3).
Contando il numero di quadretti si conclude che il seno di 58 gradi corrisponde a “0.85”. Tuttavia il punto P appare ben più grosso di un quadratino della carta millimetrata e stupisce il fatto che si arrivi alla seconda cifra decimale.

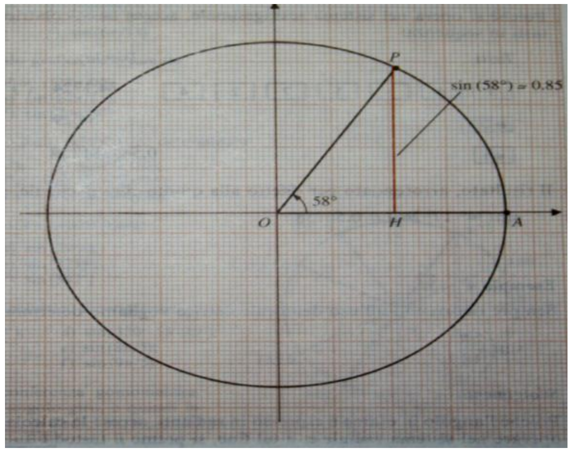


Figura 3

In questo caso dunque lo strumento carta millimetrata impone di approssimare la misura diversamente da ciò che avviene nel prossimo esempio. In questo esempio sembrano essere utilizzate contemporaneamente due tipi di rappresentazioni. Per quanto riguarda gli angoli si avrebbero rappresentazioni esatte (l'angolo il cui seno viene chiesto è 58°) ma non è chiaro come sia stata ottenuta tale misura. Mentre per la misura del seno si ricava un numero rappresentato in maniera approssimata.

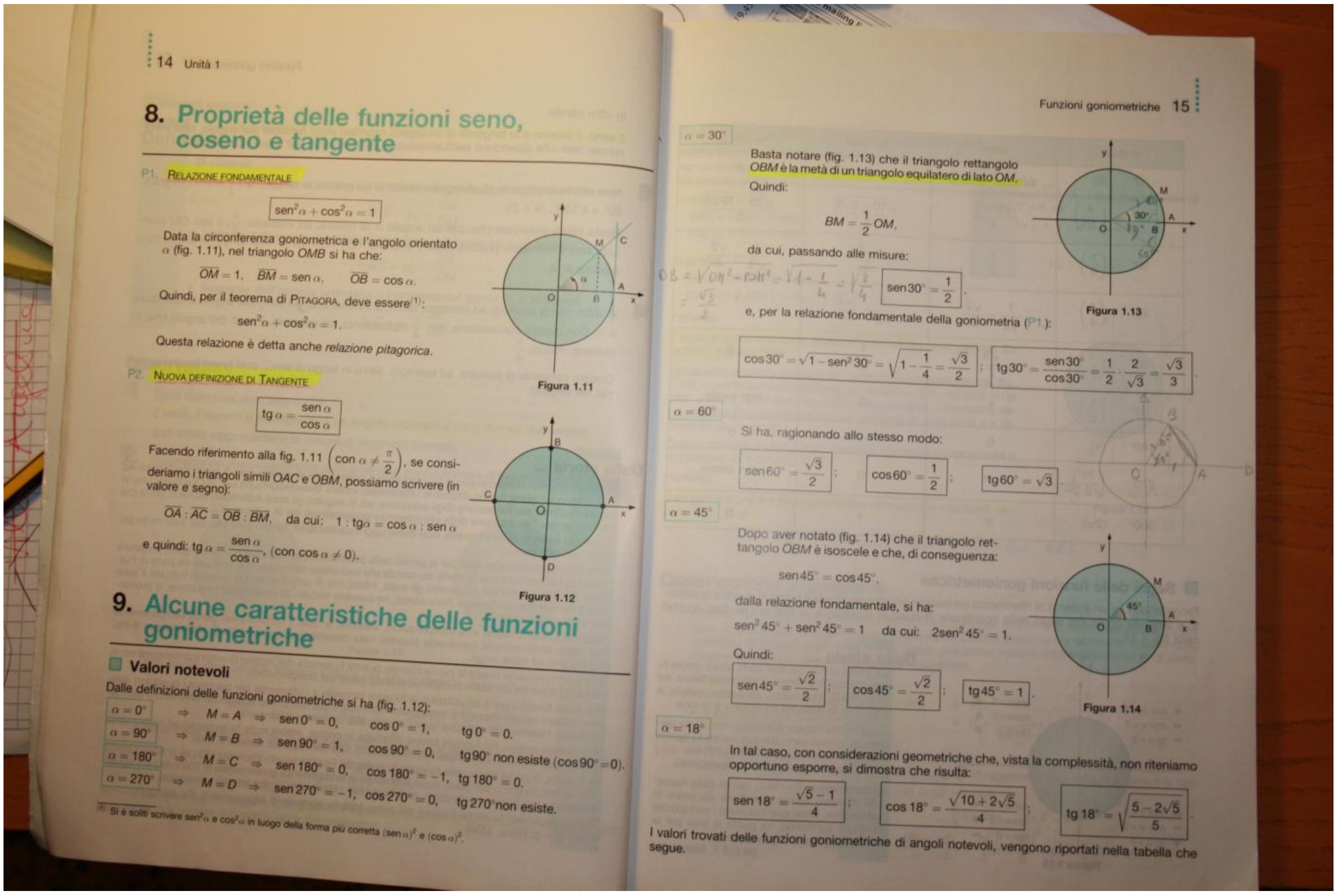
Esempio 3 (metodo a)

Le pagine del testo riportate nella figura 4 presentano in che modo è possibile eseguire il calcolo argomentato dei valori del seno e del coseno di angoli cosiddetti notevoli: 30, 45 e 60 gradi.

In tutti i libri esaminati vengono calcolati i valori di questi angoli attraverso argomentazioni geometriche nel modo seguente:

- ci si deve ricondurre alla risoluzione di un triangolo rettangolo,
- occorre conoscere le proprietà dei triangoli iscosceli,
- occorre conoscere il teorema di Pitagora.

Il percorso proposto appare rigoroso e non fa ricorso ad alcuna approssimazione e conduce ai ben noti risultati rappresentati questa volta da valori esatti nei quali è facilmente riconoscibile che si tratta di numeri irrazionali.


14 Unità 1

8. Proprietà delle funzioni seno, coseno e tangente

P1. RELAZIONE FONDAMENTALE

$$\boxed{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

Data la circonferenza goniometrica e l'angolo orientato α (fig. 1.11), nel triangolo OMB si ha che:

$$\overline{OM} = 1, \quad \overline{BM} = \text{sen}\,\alpha, \quad \overline{OB} = \cos\alpha.$$

Quindi, per il teorema di PITAGORA, deve essere(1):

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Questa relazione è detta anche *relazione pitagorica*.

Figura 1.11

P2. NUOVA DEFINIZIONE DI TANGENTE

$$\boxed{\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}}$$

Facendo riferimento alla fig. 1.11 $\left(\text{con } \alpha \neq \frac{\pi}{2}\right)$, se consideriamo i triangoli simili OAC e OBM, possiamo scrivere (in valore e segno):

$$\overline{OA} : \overline{AC} = \overline{OB} : \overline{BM}, \quad \text{da cui:} \quad 1 : \text{tg}\alpha = \cos\alpha : \text{sen}\,\alpha$$

e quindi: $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$, (con $\cos\alpha \neq 0$).

Figura 1.12

9. Alcune caratteristiche delle funzioni goniometriche

Valori notevoli

Dalle definizioni delle funzioni goniometriche si ha (fig. 1.12):

$\alpha = 0°$ ⇒ $M = A$ ⇒ $\text{sen}\,0° = 0$, $\cos 0° = 1$, $\text{tg}\,0° = 0$.

$\alpha = 90°$ ⇒ $M = B$ ⇒ $\text{sen}\,90° = 1$, $\cos 90° = 0$, $\text{tg}\,90°$ non esiste ($\cos 90° = 0$).

$\alpha = 180°$ ⇒ $M = C$ ⇒ $\text{sen}\,180° = 0$, $\cos 180° = -1$, $\text{tg}\,180° = 0$.

$\alpha = 270°$ ⇒ $M = D$ ⇒ $\text{sen}\,270° = -1$, $\cos 270° = 0$, $\text{tg}\,270°$ non esiste.

(1) Si è soliti scrivere $\text{sen}^2\alpha$ e $\cos^2\alpha$ in luogo della forma più corretta $(\text{sen}\,\alpha)^2$ e $(\cos\alpha)^2$.

Funzioni goniometriche 15

$\alpha = 30°$

Basta notare (fig. 1.13) che il triangolo rettangolo OBM è la metà di un triangolo equilatero di lato OM.

Quindi:

$$BM = \frac{1}{2}OM,$$

da cui, passando alle misure:

$$\boxed{\text{sen}\,30° = \frac{1}{2}},$$

e, per la relazione fondamentale della goniometria (P1):

$$\boxed{\cos 30° = \sqrt{1 - \text{sen}^2 30°} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}}; \quad \boxed{\text{tg}\,30° = \frac{\text{sen}\,30°}{\cos 30°} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}}.$$

Figura 1.13

$\alpha = 60°$

Si ha, ragionando allo stesso modo:

$$\boxed{\text{sen}\,60° = \frac{\sqrt{3}}{2}}; \quad \boxed{\cos 60° = \frac{1}{2}}; \quad \boxed{\text{tg}\,60° = \sqrt{3}}.$$

$\alpha = 45°$

Dopo aver notato (fig. 1.14) che il triangolo rettangolo OBM è isoscele e che, di conseguenza:

$$\text{sen}\,45° = \cos 45°,$$

dalla relazione fondamentale, si ha:

$$\text{sen}^2 45° + \text{sen}^2 45° = 1 \quad \text{da cui:} \quad 2\text{sen}^2 45° = 1.$$

Quindi:

$$\boxed{\text{sen}\,45° = \frac{\sqrt{2}}{2}}; \quad \boxed{\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}}; \quad \boxed{\text{tg}\,45° = 1}.$$

Figura 1.14

$\alpha = 18°$

In tal caso, con considerazioni geometriche che, vista la complessità, non riteniamo opportuno esporre, si dimostra che risulta:

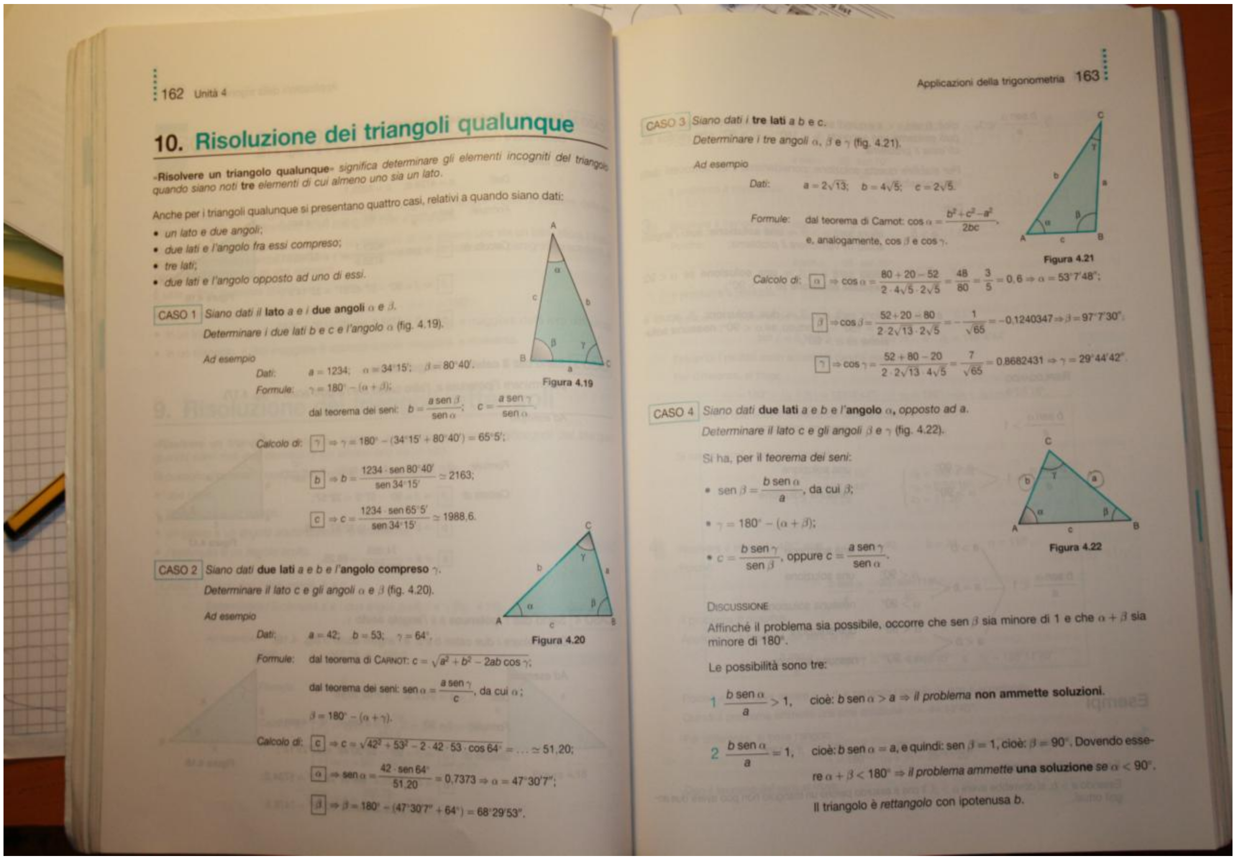
$$\boxed{\text{sen}\,18° = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}}; \quad \boxed{\cos 18° = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}}; \quad \boxed{\text{tg}\,18° = \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}}}.$$

I valori trovati delle funzioni goniometriche di angoli notevoli, vengono riportati nella tabella che segue.

Figura 4

Esempio 4 (metodo c)

Appena qualche pagina dopo del medesimo manuale vengono presentati altri argomenti e, quindi, nuovi esempi che coinvolgono triangoli caratterizzati da angoli che abbiano anche valori diversi da quelli notevoli. In questo caso il valore del seno dell'angolo apparso come un numero irrazionale viene approssimato con un numero preciso fino alla settima cifra decimale. Non viene specificato il modo in cui viene calcolato il valore.



162 Unità 4

10. Risoluzione dei triangoli qualunque

«**Risolvere un triangolo qualunque**» *significa determinare gli elementi incogniti del triangolo quando siano noti* **tre** *elementi di cui almeno uno sia un lato.*

Anche per i triangoli qualunque si presentano quattro casi, relativi a quando siano dati:

- *un lato e due angoli;*
- *due lati e l'angolo fra essi compreso;*
- *tre lati;*
- *due lati e l'angolo opposto ad uno di essi.*

CASO 1 *Siano dati il* **lato** *a e i* **due angoli** α *e* β.
Determinare i due lati b e c e l'angolo α (fig. 4.19).

Ad esempio

Dati: $a = 1234$; $\alpha = 34°15'$; $\beta = 80°40'$.

Formule: $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$;

dal teorema dei seni: $b = \frac{a \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha}$; $c = \frac{a \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \alpha}$

Calcolo di: $\boxed{\gamma} \Rightarrow \gamma = 180° - (34°15' + 80°40') = 65°5'$;

$\boxed{b} \Rightarrow b = \frac{1234 \cdot \operatorname{sen} 80°40'}{\operatorname{sen} 34°15'} \simeq 2163$;

$\boxed{c} \Rightarrow c = \frac{1234 \cdot \operatorname{sen} 65°5'}{\operatorname{sen} 34°15'} \simeq 1988{,}6$.

Figura 4.19

CASO 2 *Siano dati* **due lati** *a e b e l'***angolo compreso** γ.
Determinare il lato c e gli angoli α *e* β (fig. 4.20).

Ad esempio

Dati: $a = 42$; $b = 53$; $\gamma = 64°$.

Formule: dal teorema di Carnot: $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}$;

dal teorema dei seni: $\operatorname{sen} \alpha = \frac{a \operatorname{sen} \gamma}{c}$, da cui α;

$\beta = 180° - (\alpha + \gamma)$.

Calcolo di: $\boxed{c} \Rightarrow c = \sqrt{42^2 + 53^2 - 2 \cdot 42 \cdot 53 \cdot \cos 64°} = \ldots \simeq 51{,}20$;

$\boxed{\alpha} \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{42 \cdot \operatorname{sen} 64°}{51{,}20} = 0{,}7373 \Rightarrow \alpha = 47°30'7''$;

$\boxed{\beta} \Rightarrow \beta = 180° - (47°30'7'' + 64°) = 68°29'53''$.

Figura 4.20

Applicazioni della trigonometria 163

CASO 3 *Siano dati i* **tre lati** *a b e c.*
Determinare i tre angoli α, β *e* γ (fig. 4.21).

Ad esempio

Dati: $a = 2\sqrt{13}$; $b = 4\sqrt{5}$; $c = 2\sqrt{5}$.

Formule: dal teorema di Carnot: $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$,

e, analogamente, $\cos \beta$ e $\cos \gamma$.

Calcolo di: $\boxed{\alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{80 + 20 - 52}{2 \cdot 4\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}} = \frac{48}{80} = \frac{3}{5} = 0{,}6 \Rightarrow \alpha = 53°7'48''$;

$\boxed{\beta} \Rightarrow \cos \beta = \frac{52 + 20 - 80}{2 \cdot 2\sqrt{13} \cdot 2\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{65}} = -0{,}1240347 \Rightarrow \beta = 97°7'30''$;

$\boxed{\gamma} \Rightarrow \cos \gamma = \frac{52 + 80 - 20}{2 \cdot 2\sqrt{13} \cdot 4\sqrt{5}} = \frac{7}{\sqrt{65}} = 0{,}8682431 \Rightarrow \gamma = 29°44'42''$.

Figura 4.21

CASO 4 *Siano dati* **due lati** *a e b e l'***angolo** α, *opposto ad a.*
Determinare il lato c e gli angoli β *e* γ (fig. 4.22).

Si ha, per il *teorema dei seni*:

- $\operatorname{sen} \beta = \frac{b \operatorname{sen} \alpha}{a}$, da cui β;
- $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$;
- $c = \frac{b \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \beta}$, oppure $c = \frac{a \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \alpha}$.

Figura 4.22

Discussione

Affinché il problema sia possibile, occorre che $\operatorname{sen} \beta$ sia minore di 1 e che $\alpha + \beta$ sia minore di 180°.

Le possibilità sono tre:

1 $\frac{b \operatorname{sen} \alpha}{a} > 1$, cioè: $b \operatorname{sen} \alpha > a \Rightarrow$ *il problema* **non ammette soluzioni.**

2 $\frac{b \operatorname{sen} \alpha}{a} = 1$, cioè: $b \operatorname{sen} \alpha = a$, e quindi: $\operatorname{sen} \beta = 1$, cioè: $\beta = 90°$. Dovendo essere $\alpha + \beta < 180° \Rightarrow$ *il problema ammette* **una soluzione** se $\alpha < 90°$.

Il triangolo è *rettangolo* con ipotenusa *b*.

Figura 5

Anche in questo caso lo scopo dell'autore non è quello di porre situazioni problematiche, ma semplicemente di fare in modo che lo studente applichi meccanicamente alcune formule derivate da teoremi (nella figura 5 il teorema dei seni e il teorema di Carnot).

In effetti è assolutamente taciuto il modo in cui avvenga il passaggio della trascrizione dei numeri dalla formula al calcolo.

Sembra che il calcolo sia stato operato da una calcolatrice ma non si riesce a capire come questa sia stata adoperata (le istruzioni per l'uso?) e soprattutto perché in alcuni casi – come esemplificato nell'esempio 3 – si possa utilizzar, mentre in altri casi – come questo – è preferibile farne a meno. Dunque in questo esempio vengono giustapposte rappresentazioni esatte e approssimate. Più precisamente a partire da numeri rappresentati esattamente si ottengono, dopo l'applicazione di alcune formule, numeri rappresentati in modo approssimato.

Esempio 5 (metodo c)

In molti libri di testo sono presenti delle sezioni che esemplificano l'uso di certe operazioni matematiche per risolvere problemi che abbiano qualche caratteristica di concretezza. Solitamente ci si riferisce alla fisica.

Le figure che seguono (6 e 7) mostrano invece una serie di problemi mutuati dal libro di fisica in cui è necessario applicare i teoremi trigonometrici studiati nei capitoli precedenti.

Esempi

1 *Una forza costante, di intensità $F = 20$ N, applicata a un punto materiale lo sposta di 80 cm in una direzione che forma un angolo di 75° con la direzione della forza. Qual è il lavoro compiuto dalla forza?*

Applicando la formula (1), si ha:

$$L = Fs\cos\alpha = 20 \cdot 0,8 \cdot \cos 75° = 16 \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \cong 4,14\ \text{J}.$$

Figura 6

203. La forza di 74, 8 N è applicata ad un punto materiale. Questo si sposta di 96 cm in una direzione formante un angolo di 35° con quello della forza. Trovare il lavoro compiuto dalla forza. [58, 8 J]

204. La forza di 7, 48 N, applicata ad un punto materiale, ne provoca lo spostamento di 48 cm. Sapendo che il lavoro che essa compie vale 2 J, quanto vale l'ampiezza α dell'angolo tra la direzione della forza e dello spostamento? [$\cos\alpha = 0,557$]

205. Quale lavoro compie la forza di 10 kg N, se sposta il suo punto di applicazione di 8 m in una direzione che forma con quella della forza stessa un angolo di 60°? [$L = 40$ kg $N \cdot m$]

206. Un piano è inclinato di un angolo di 21°10′ sull'orizzontale. Con quale accelerazione si muove su di esso, secondo la massima inclinazione, una sfera metallica in un luogo ove è $g = 9,8\,\frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$, supposti nulli gli attriti? $\left[a = 3,53878\,\frac{\text{m}}{\text{sec}^2}\right]$

Figura 7

Gli esercizi appaiono ancora una sorta di pretesto per applicare una formula nota e i calcoli sono svolti senza minimamente spiegare in che modo siano avvenute le approssimazioni.

Il tentativo dell'autore è, probabilmente, quello di dimostrare allo studente che i concetti appena studiati sono utili anche in un contesto "reale". Ma – mentre ogni libro di fisica introduce l'argomento relativo all'approssimazione e alla scrittura del numero, evidenziando che due diverse rappresentazioni del numero conducono a due significati differenti di esso (mi riferisco per esempio alla differenza tra lo scrivere 0,2 oppure 0,28) – nei libri di matematica da me esaminati compaiono nei risultati numeri approssimati in maniera (sembrerebbe) alquanto priva di *ratio*. Dagli esempio mostrati nelle figure tratte dallo stesso libro di testo sembrerebbe indifferente scrivere, numeri con rappresentazioni completamente diverse tra loro.

Esempio 6 (metodo d)

Altri esempi di esercizi in cui si richiede di calcolare il seno di un angolo qualsiasi questa volta utilizzando il software Cabrì Geometre.

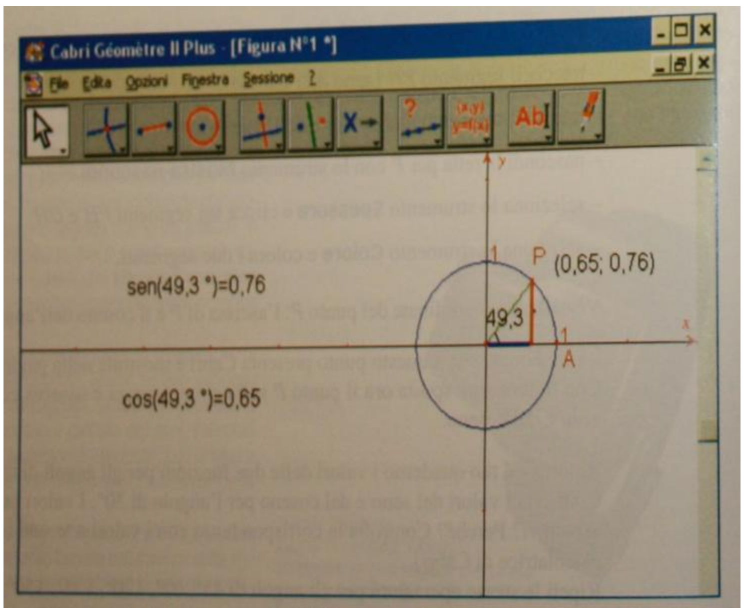


Figura 8

È ovvio che il programma provvede a calcolare il seno e il coseno richiesto utilizzando processi dei quali non sono a conoscenza né lo studente, né (di solito) il docente.
Il procedimento è semplicissimo. Si disegna un cerchio centrato nell'origine degli assi, si traccia un punto sulla circonferenza per potere quindi individuare un angolo e i segmenti relativi al seno e al coseno dell'angolo considerato. In questo caso il programma assegna per *default* due cifre decimali (figura 8). È evidente quindi che anche i valori del seno di 60 gradi, calcolati poche pagine prima e descritti nell'esempio 2, apparirebbero con rappresentazioni assolutamente diverse.

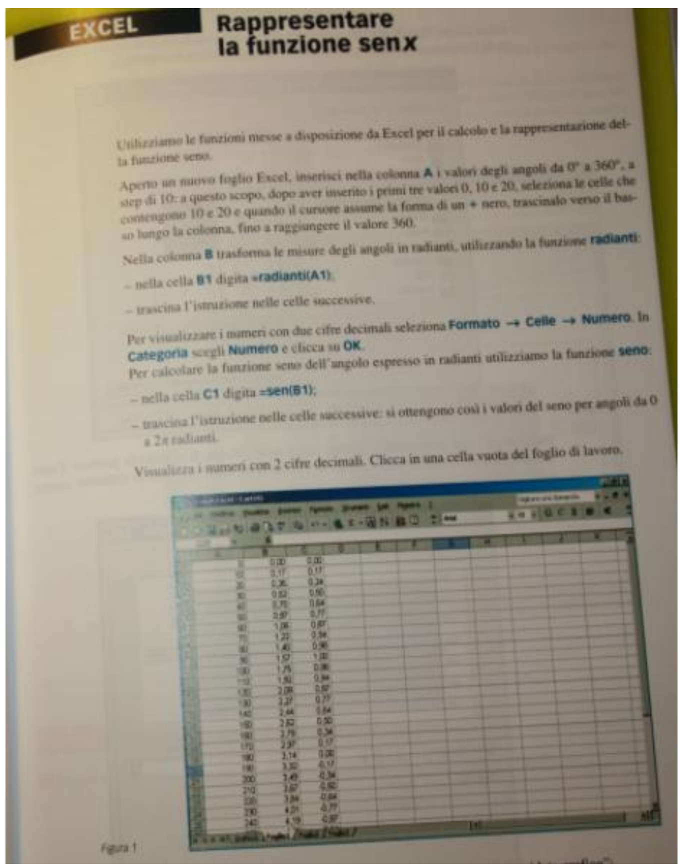
Esempio 7 (metodo e)

In questo ulteriore esempio il testo propone di rappresentare la funzione seno mediante un software di calcolo, in particolare Excel, procedendo nel seguente modo:

- crea una tabella la cui prima colonna rappresenta valori dell'angolo in gradi distanziati l'uno dall'altra di 10 gradi;
- nella seconda colonna applica la formula "radianti" preinstallata nel software;
- utilizza la funzione (anche questa preinstallata) seno della cella a sinistra;
- utilizza la funzione automatica "crea grafico".

Ciò che voglio far notare è che anche in questo caso bisogna provvedere ad impostare il tipo di approssimazione che viene usata. Il libro spiega (figura 9) che per poter lavorare all'esercizio proposto è opportuno settare le celle che si devono prendere in considerazione nella modalità "numero"; dopo aver eseguito questa impostazione è indicato di scegliere di visualizzare due cifre dopo la virgola (anziché le sei che sarebbero visualizzate per *default*). Questa scelta non è però assolutamente commentata. Perché sia preferibile utilizzare due anziché sei cifre rimane per lo studente una scelta imperscrutabile. Non si capisce, tra l'altro, se si tratta semplicemente di una questione legata alla visualizzazione delle cifre (che comunque incidono nei calcoli successivi) o se, invece, le cifre decimali non vengono più considerate perché ritenute irrilevanti.

Dopo aver provveduto a generare la tabella (figura 10), viene creato il grafico (figura 11) specificando l'utilizzo, tra tutte le possibilità, della modalità in cui i punti vengono uniti in maniera continua e facendo sparire i puntini che rappresenterebbero i valori effettivamente elaborati nella tabella. Questa ulteriore scelta, sempre non motivata né commentata, trasforma una raccolta di dati per sua natura discreta in un grafico continuo. Dunque l'autore giunge alla ben nota rappresentazione della sinusoide.



EXCEL

Rappresentare la funzione sen*x*

Utilizziamo le funzioni messe a disposizione da Excel per il calcolo e la rappresentazione della funzione seno.

Aperto un nuovo foglio Excel, inserisci nella colonna **A** i valori degli angoli da 0° a 360°, a step di 10: a questo scopo, dopo aver inserito i primi tre valori 0, 10 e 20, seleziona le celle che contengono 10 e 20 e quando il cursore assume la forma di un + nero, trascinalo verso il basso lungo la colonna, fino a raggiungere il valore 360.

Nella colonna **B** trasforma le misure degli angoli in radianti, utilizzando la funzione **radianti**:

– nella cella **B1** digita **=radianti(A1)**;

– trascina l'istruzione nelle celle successive.

Per visualizzare i numeri con due cifre decimali seleziona **Formato → Celle → Numero**. In **Categoria** scegli **Numero** e clicca su **OK**.

Per calcolare la funzione seno dell'angolo espresso in radianti utilizziamo la funzione **seno**:

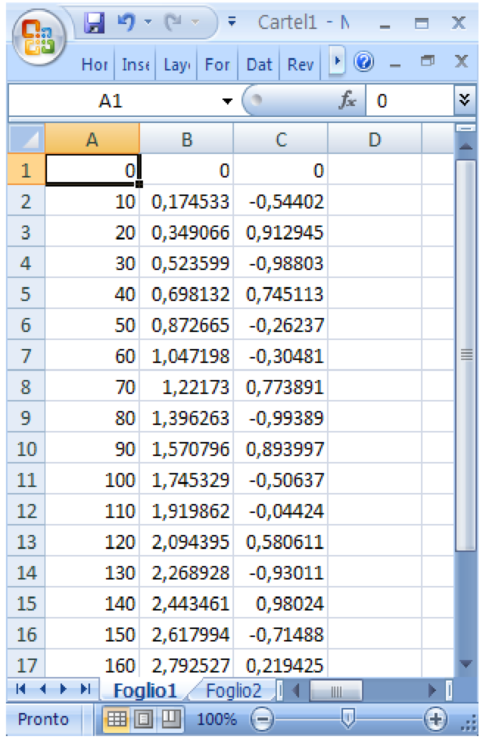
– nella cella **C1** digita **=sen(B1)**;

– trascina l'istruzione nelle celle successive: si ottengono così i valori del seno per angoli da 0 a 2π radianti.

Visualizza i numeri con 2 cifre decimali. Clicca in una cella vuota del foglio di lavoro.

Figura 1

Figura 9



	A	B	C	D
1	0	0	0	
2	10	0,174533	-0,54402	
3	20	0,349066	0,912945	
4	30	0,523599	-0,98803	
5	40	0,698132	0,745113	
6	50	0,872665	-0,26237	
7	60	1,047198	-0,30481	
8	70	1,22173	0,773891	
9	80	1,396263	-0,99389	
10	90	1,570796	0,893997	
11	100	1,745329	-0,50637	
12	110	1,919862	-0,04424	
13	120	2,094395	0,580611	
14	130	2,268928	-0,93011	
15	140	2,443461	0,98024	
16	150	2,617994	-0,71488	
17	160	2,792527	0,219425	

Figura 10

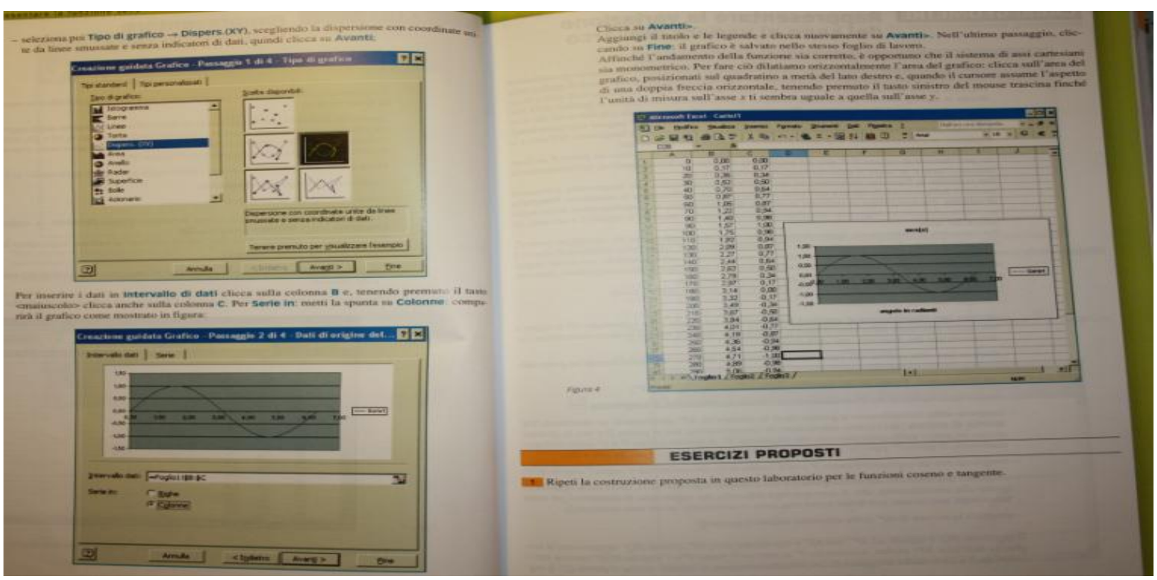


Figura 11

Nella tabella che segue viene presentata una breve sinossi dell'analisi svolta sui cinque volumi scolastici in uso nella scuola secondaria superiore che trattano argomenti di goniometria e trigonometria appena esaminati negli esempi trascelti.

Titolo / Osservazioni	*Corso di matematica*[8]	*Funzioni elementari*[9]	*Matematica per i licei scientifici*[10]	*Corso di matematica sperimentale e laboratorio*[11]	*Elementi di trigonometria*[12]
Strategie per calcolare i valori delle funzioni goniometiche	Vengono presentati procedimenti argomentati per calcolare i valori del seno, del coseno e della tangente degli angoli notevoli: π/3, π/6, π/4. Per tutti gli altri angoli, implicitamente, si fa uso di calcolatrice.	Vengono presentati procedimenti argomentati per calcolare i valori del seno, del coseno e della tangente degli angoli notevoli: π/3, π/6, π/4. Per tutti gli altri angoli, implicitamente, si fa uso di calcolatrice	Vengono presentati procedimenti argomentati per calcolare i valori del seno, del coseno e della tangente degli angoli notevoli: π/3, π/6, π/4. Viene fatto riferimento esplicito all'uso della calcolatrice per calcolare i valori delle suddette funzioni.	Vengono presentati procedimenti argomentati per calcolare i valori del seno, del coseno e della tangente degli angoli notevoli: π/3, π/6, π/4. Per gli altri angoli si fa uso di carta millimetrata e calcolatrice.	Vengono presentati procedimenti argomentati per calcolare i valori del seno, del coseno e della tangente degli angoli notevoli: π/3, π/6, π/4.
Uso di calcolatrici o software	Usa software come geogebra ed excel. Sceglie di utilizzare solo due cifre dopo la virgola.	Nessuno.	Usa software come cabri ed excel. Sceglie di utilizzare solo due cifre dopo la virgola.	Procedimenti con la calcolatrice sono presentati continuamente. Il libro contiene un software didattico proprio.	Nessuno.
Problemi "dal mondo reale"	Sono presentati degli esercizi applicabili a problemi di fisica ed esercizi con misure in centimetri.	Sono presentati degli esercizi applicabili a problemi di fisica ed esercizi con misure in centimetri.	In appendice ad alcuni capitoli ci sono approfondimenti storici, applicativi.	Ci sono approfondimenti storici, applicativi. Sono presentate numerose applicazioni pratiche.	Nessuno.
Rappresentazioni del numero	Nella parte teorica e negli esercizi svolti non si operano approssimazioni né calcoli da svolgere con calcolatrici. Negli esercizi in cui compaiono angoli notevoli non si approssima mai; altrimenti si approssima.	Nella parte teorica e negli esercizi svolti non si operano approssimazioni né calcoli da svolgere con calcolatrici. Negli esempi svolti si trovano approssimazioni di numeri irrazionali. Tra gli esercizi si trovano misure in centimetri con numeri irrazionali.	In alcuni esercizi i valori vengono approssimati, in altri no.	Si approssima sempre visto che le soluzioni sono spesso ottenute utilizzando la calcolatrice. Tra le soluzioni degli esercizi, alla fine del libro, si trovano misure con numeri irrazionali.	Nessuna.

Concludendo, ciò che accomuna gli esempi appena esposti riguarda il calcolo attraverso strategie differenti, alcune delle quali coinvolgono l'uso di strumenti informatici.

[8] Cassina, E., Canepa, A. & Gerace M., (2008). Corso di Matematica, vol. 4. paravia.

[9] Scovenna, M., (2001). Funzioni Elementari, Cedam.

[10] Re Fraschini, M. & Grazzi, G. (2011). Matematica per licei scientifici, vol. 2. Atlas.

[11] Battelli, M. (2005). Corso di matematica sperimentale e laboratorio, vol. 3, Le Monnier.

[12] Gianlupi, G. & Bo, M., (1998), Elementi di Trigonometria, Poseidonia.

Se il problema dello strumento usato e della conseguente approssimazione non viene posto, allora il significato stesso del numero appare quanto mai artificioso e ambiguo. Perché uno studente dovrebbe mai utilizzare un numero irrazionale? Perché scrivere radice di 3 se il suo significato è equivalente a 1,73? Pertiene dunque al ruolo di "mediatore culturale" proprio dell'insegnante (Mariotti, 2009, p. 284) il compito fondamentale di interpretare la polisemia dello strumento. Quello che mi pare si possa dire a conclusione di questo paragrafo è che ogni strumento induce a rappresentare i risultati di semplici calcoli in maniera differente. Quello che si vorrà mostrare con le sperimentazioni è che ciò può influenzare il modo di interpretare o risolvere un problema da parte dell'alunno.

Usare un software per risolvere esercizi: esemplificazioni.

Che i libri di testo veicolino l'uso di una certa tecnologia induce a riflettere sulla 'legittimità educativa' delle tecnologie informatiche (Artigue, 1998) in quanto spesso gli insegnanti non prendono in considerazione le tecniche di utilizzo che vengono così acquisite dagli studenti indipendentemente, contrariamente a ciò che succede quando si lavora in ambiente carta / matita.
Come afferma Noss (1995), non è sufficiente che una tecnologia sia "buona" in sé perché la didattica sia migliore. Gli esempi visti nel paragrafo precedente mostrano una tecnologia comoda, amichevole, semplice da usare e veloce nel dare risultati. Tuttavia prima di utilizzare un software è necessario un tempo propedeutico perché sia utilizzato in modo proficuo; esso infatti implica una ridefinizione dei contenuti nonché un ripensamento e dei metodi stessi di insegnamento e quindi anche del ruolo dell'insegnante.

Trouche (1996) ha individuato tra i vincoli, che sono elementi significativi della trasposizione computazionale della conoscenza matematica, quelli "interni", cioè legati alla rappresentazione degli oggetti propri del software e al loro processo di calcolo.

Questo tipo di vincolo viene fatto risaltare in un esempio che lo stesso Trouche lega all'uso di una calcolatrice programmabile, la TI92 (Trouche, 1998).

Ripeterò adesso il suo stesso ragionamento usando Wolfram alfa[13].

Nel testo sopra citato, Trouche lavora con le equazioni goniometriche, in particolare mettendo alla prova il software per quel che riguarda la formula di duplicazione del coseno. Io ho provato ad ampliare e ad approfondire l'esperimento.

Per prima cosa ho inserito l'espressione della formula di duplicazione così come appare nei libri di testo:

Input:

$$\cos(2\,x) = 2\cos^2(x) - 1$$

cos(2x)=2(cosx)^2-1 WolframAlpha

Il risultato è ovviamente

Result:

True

cos(2x)=2(cosx)^2-1 WolframAlpha

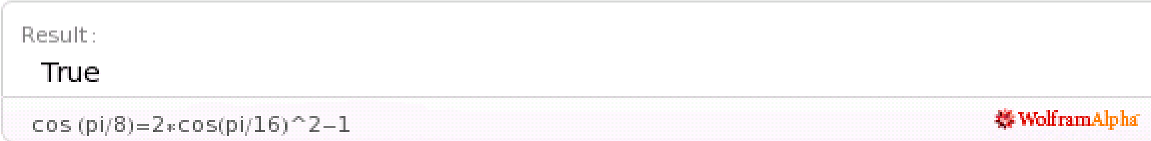
Quindi l'ho messo alla prova con dei valori in particolare: T. usa appunto pi/8 e pi/16.

Input:

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{16}\right) - 1$$

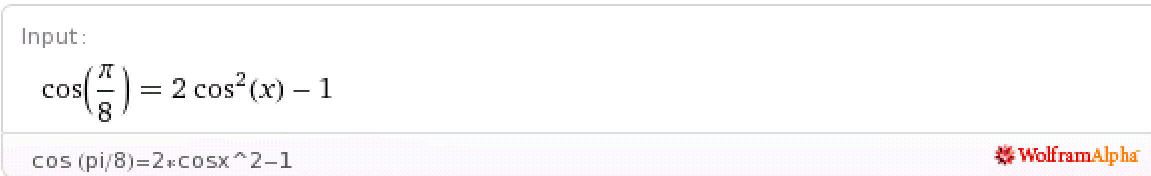
cos (pi/8)=2*cos(pi/16)^2-1 WolframAlpha

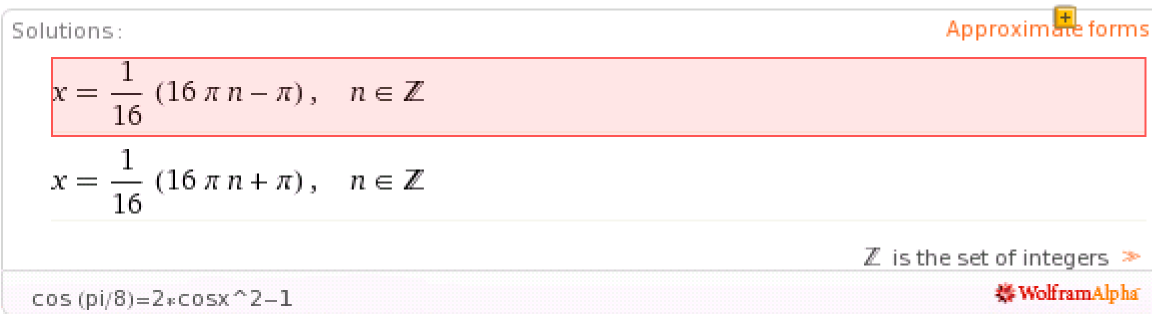
[13] http://www.wolframalpha.com/



Anche in questo caso il software non trova difficoltà e riconosce l'identità.

A questo punto viene assegnata a Wolfram una equazione goniometrica, così come potrebbero essere quelle trovate negli eserciziari dei libri di testo.





Si nota che si può scegliere tra la forma esatta e quella approssimata.

Trouche chiede quindi di risolvere la seguente equazione:

Input:

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\,x^2 - 1$$

cos (pi/8)=2x^2–1 WolframAlpha

Le soluzioni adesso appaiono meno controllabili.

Solutions: Approximate forms

$$x = -\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)}$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)}$$

cos (pi/8)=2x^2–1 WolframAlpha

Proviamo con la forma approssimata

Solutions: Exact forms | More digits

$x \approx -0.980785$

$x \approx 0.980785$

cos (pi/8)=2x^2–1 WolframAlpha

Quindi T. fa l’operazione inversa: prende i risultati e li verifica.

Ma i risultati sono piuttosto deludenti in quanto le stesse soluzioni che vengono individuate dal software non determinano delle identità se sostituite alle variabili nell’equazione iniziale.

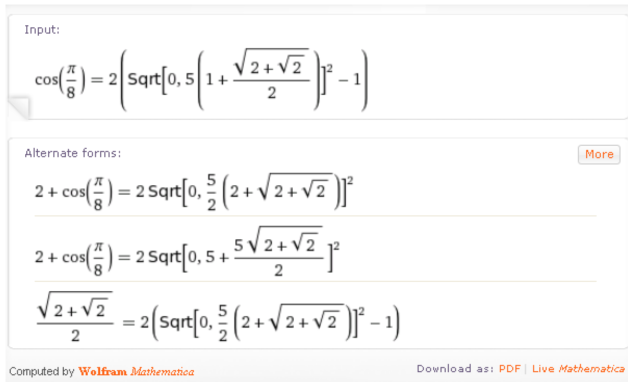
Input:

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\,\{0,\ 980\,785\}^2 - 1$$

Exact result:

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \{-1,\ 1\,923\,878\,432\,449\}$$

Computed by Wolfram *Mathematica* Download as: PDF | Live *Mathematica*



A partire da questo esempio ho provato ad applicare le considerazioni sopra esposte all'uso di Excel che sarà utilizzato nelle sperimentazioni descritte in seguito.

Excel (o un software di calcolo equivalente) è notoriamente un software molto comune che gli studenti trovano facilmente nei loro computer e il cui uso in particolare, come abbiamo visto, è fortemente incoraggiato dai libri di testo.

Ho proceduto quindi in questo modo: nella colonna A ho inserito dei valori che andranno sostituiti alla variabile: sono gli interi da 0 a 360 step 10. Nella colonna B ho inserito l'espressione mentre nella colonna C l'espressione . Impostando le celle come numeri si ottiene automaticamente che vengano visualizzate due cifre dopo la virgola. In maniera sorprendente ci sono dei valori che non verificano la formula di duplicazione (figura 12).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	0,00	1,00	1,00	VERO						
2	10,00	0,41	0,41	VERO		COS(PI.GRECO()/8)	2*(0,980785)^2-1			
3	20,00	-0,67	-0,67	VERO		0,92	0,92	FALSO		
4	30,00	-0,95	-0,95	VERO						
5	31,70	0,84	0,84	VERO						
6	39,90	-0,31	-0,31	VERO						
7	40,00	-0,11	-0,11	FALSO						
8	40,10	0,09	0,09	FALSO						
9	40,11	0,11	0,11	VERO						
10	50,00	0,86	0,86	VERO						
11	60,00	0,81	0,81	VERO						
12	70,00	-0,20	-0,20	VERO						
13	80,00	-0,98	-0,98	VERO						
14	90,00	-0,60	-0,60	VERO						
15	100,00	0,49	0,49	VERO						
16	110,00	1,00	1,00	VERO						
17	120,00	0,33	0,33	VERO						
18	130,00	-0,73	-0,73	VERO						
19	140,00	-0,92	-0,92	VERO						
20	150,00	-0,02	-0,02	FALSO						
21	160,00	0,90	0,90	VERO						
22	170,00	0,76	0,76	VERO						
23	180,00	-0,28	-0,28	VERO						
24	190,00	-0,99	-0,99	VERO						
25	200,00	-0,53	-0,53	VERO						

Figura 12

Dunque ho messo alla prova Excel con un problema molto comune di geometria analitica: determinare le eventuali intersezioni tra la retta − e la parabola − (figura 13).

	A	B	C	D
1	x	y=√2 x^2	y=√2 x	
2	0,00	0,00	0,00	FALSO
3	1,00	1,41	1,41	FALSO
4	1,41	2,83	2,00	FALSO
5	2,00	5,66	2,83	FALSO
6	3,00	12,73	4,24	FALSO
7	4,00	22,63	5,66	FALSO
8	5,00	35,36	7,07	FALSO
9	6,00	50,91	8,49	FALSO
10	7,00	69,30	9,90	FALSO
11	8,00	90,51	11,31	FALSO
12	9,00	114,55	12,73	FALSO
13	10,00	141,42	14,14	FALSO
14	11,00	171,12	15,56	FALSO
15	12,00	203,65	16,97	FALSO
16	13,00	239,00	18,38	FALSO

Figura 13

Ovviamente ogni studente sarebbe pronto a risolvere questo esercizio con carta e penna utilizzando calcoli esclusivamente algebrici, mettendo a sistema le due equazioni per determinare il punto di intersezione . Ma se uno studente volesse tentare di risolvere questo esercizio con un software, dedurrebbe con sorpresa che, nonostante le apparenze, non ci sono intersezioni (figura 14).

A4 fx 1,0001

	A	B	C	D	E
1	x	y=√2 x^2	y=√2 x		
2	0,00	0,00	0,00	FALSO	
3	1,00	1,41	1,41	FALSO	
4	1,00	1,41	1,41	FALSO	
5	1,41	2,83	2,00	FALSO	
6	2,00	5,66	2,83	FALSO	
7	3,00	12,73	4,24	FALSO	
8	4,00	22,63	5,66	FALSO	
9	5,00	35,36	7,07	FALSO	
10	6,00	50,91	8,49	FALSO	
11	7,00	69,30	9,90	FALSO	
12	8,00	90,51	11,31	FALSO	
13	9,00	114,55	12,73	FALSO	
14	10,00	141,42	14,14	FALSO	
15	11,00	171,12	15,56	FALSO	
16	12,00	203,65	16,97	FALSO	
17	13,00	239,00	18,38	FALSO	

Figura 14

Naturalmente a patto di avere inserito nella colonna D una cella di controllo. Altrimenti dedurrebbe che l'intersezione è quella determinata carta e penna.

Volendo mettere ancora alla prova il calcolo operato dal software in uso ho inserito nella cella A4 proprio sotto il valore 1 che dovrebbe determinare l'ascissa del punto di intersezione, il valore 1,0001. Dato che le celle sono formattate per individuare due cifre dopo la virgola, le celle A3 e A4 sono ad una prima occhiata indistinguibili.

Concludendo, ogni strumento di calcolo (sia tradizionale che informatico) porta con sé limitazioni che non possono essere trascurate; l'apparente somiglianza tra le rappresentazioni di oggetti matematici elaborate "carta e penna" e digitalmente non favorisce una corretta formulazione di conclusioni o di argomentazioni da parte degli studenti.

CAPITOLO 4: Problemi epistemologici. Strumenti e metodi matematici nella storia

È possibile individuare, attraverso tutta la storia della matematica, un continuo accavallarsi tra teoria e pratica. In particolare l'uso degli strumenti durante il periodo classico della matematica greca era rigidamente stabilito: i soli due strumenti da usare erano riga e compasso.

Tuttavia l'uso degli strumenti nella matematica si rivela da subito problematico, come ci testimonia Plutarco, nella sua *Vita di Marcello*:

> Così, ad esempio, per risolvere il problema, tanto spesso usato nella costruzione di figure geometriche, di trovare, dati i due estremi, i due medi di una proporzione, entrambi questi matematici facevano ricorso all'aiuto di strumenti , adattando ai loro scopi certe curve e sezioni di linee. Ciò suscitò però l'indignazione di Platone che scagliò invettive contro questa pratica considerandola come mera corruzione e annullamento del bene unico della geometria […].[14]

I Greci notoriamente accordavano un enorme valore al ragionamento a discapito di ciò che potesse avere una valenza meramente pratica o materiale. Dunque sembra che fosse concesso solo l'uso di riga e compasso in quanto analoghi fisici (Kline, 1999) delle figure allora considerate fondamentali: la retta e il cerchio.

C'è da considerare anche il fatto che, mentre tutto ciò che è sperimentale e basato sull'esperienza non garantisce l'esattezza delle conclusioni, la deduzione conduce a dei risultati assolutamente certi e alla verità che era il fine della ricerca dei matematici – filosofi.

In effetti gli antichi Greci non facevano alcun ricorso ad esempi con numeri ma utilizzavano lo stratagemma del "diagramma". Un esempio è la dimostrazione del teorema attribuito a Pitagora che conclude gli *Elementi*.di Euclide. Ci si serve di

[14] citato in Kline, 1999

una figura, il “diagramma” appunto, descritto come un mulino o come una coda di pavone (figura 15).

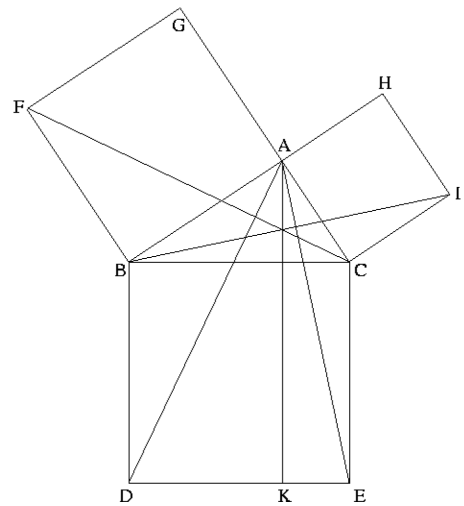


Figura 15

Il diagramma risponde all’esigenza di visualizzare un oggetto matematico che non è specifico bensì incarna tutte le possibilità esistenti; contemporaneamente chi lo manipola deve essere consapevole del fatto che, una volta disegnato e quindi dotando le sue linee di spessore e i suoi punti di dimensione, perde le caratteristiche di generalità che lo rendono strumento utile per una dimostrazione (Cuomo, 2007).
Si pone dunque il problema del rapporto tra misura teorica di un segmento o di un angolo e la misura ‘reale’ della rappresentazione di tale segmento o di tale angolo. Nella Geometria classica, in realtà, il ricorso a misure non è ammesso, mentre il riferimento a strumenti quali la riga ed il compasso è puramente teorico, anche se è possibile darne una interpretazione ‘pratica’.
Descriviamo adesso velocemente cosa si intendeva per riga e compasso:

- la riga deve essere utile soltanto per tracciare una retta per due punti; non deve essere graduata quindi non può essere utilizzata per misurare;
- il compasso, dati un centro e un punto, può tracciare una circonferenza; si noti che non serve a riportare le misure; il compasso usato, per esempio, negli Elementi una volta sollevato dal disegno si sarebbe richiuso.

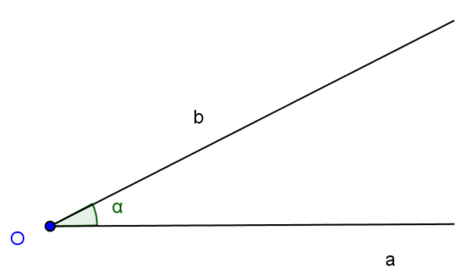
Archimede e il problema della trisezione dell’angolo

Il problema della trisezione dell’angolo può essere risolto solo per angoli particolari come 72°, 90°, 180° ma non in generale. Infatti, come ben noto, il problema della trisezione dell’angolo non è risolubile con riga e compasso; infatti è possibile stabilire la corrispondenza tra la soluzione di tale problema e la risoluzione di un’equazione di terzo grado che non ammette radici razionali. Se un’equazione cubica a coefficienti razionali non ammette radici razionali, allora nessuna delle sue radici è un numero costruibile partendo dal campo razionale e dunque si ha l’impossibilità di eseguire la trisezione con riga e compasso per ogni angolo.

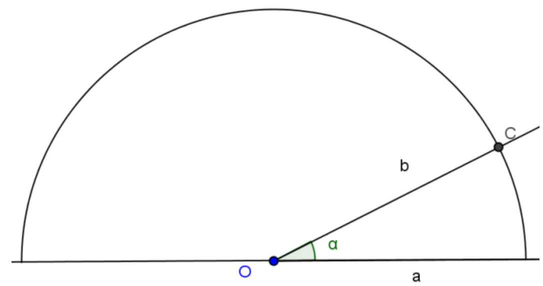
Se ammettiamo la possibilità di un uso della riga diverso da quello stabilito da Euclide, il problema risulta risolubile. È quanto fece Archimede che risolse il problema usando la riga non solo per tracciare rette ma anche per riportare segmenti.

Dal libro dei Lemmi, proposizione VIII viene presentato il seguente metodo:

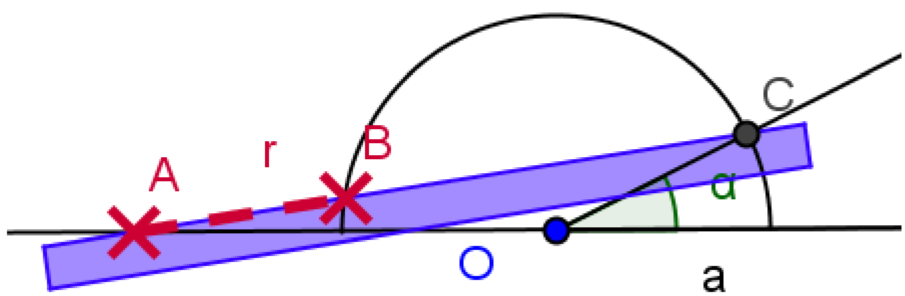
Sia dato un angolo α qualunque



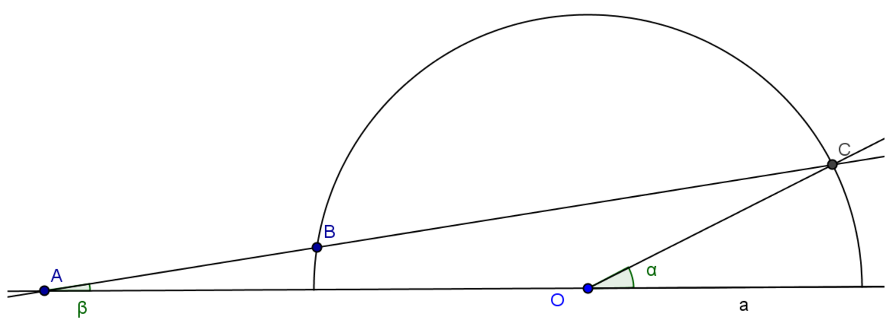
Prolunghiamo il lato *a* dell’angolo e tracciamo una semicirconferenza di raggio *r* arbitrario, avente centro nel punto O vertice dell’angolo. Indichiamo con C l’intersezione tra la semicirconferenza e il lato *b* dell’angolo.



Se adesso utilizziamo lo strumento classico *riga* ma applichiamo su di esso due tracce – chiamate A e B – che distino tra loro *r* e facciamo sì che A giaccia sul prolungamento del lato *a* , che B giaccia sulla semicirconferenza e che entrambi questi punti siano allineati con C, possiamo disegnare un segmento in questo modo:



L’angolo β che si viene a formare tra il prolungamento del lato *a* e la retta tracciata in questo modo dalla riga è la terza parte di α.

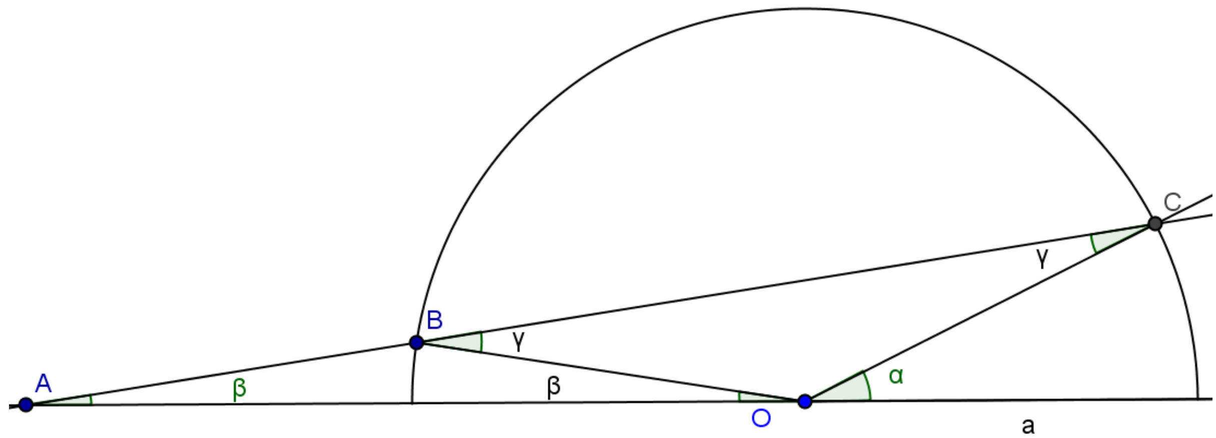


Infatti un angolo esterno ad un triangolo è uguale alla somma degli angoli interni, nessuno dei quali è adiacente ad esso. In base a questa proprietà, ricordando che , notando che il triangolo BOC è isoscele con angoli in B e C uguali a γ, possiamo dire che:

per il triangolo AOC: $\alpha=\beta+\gamma$,

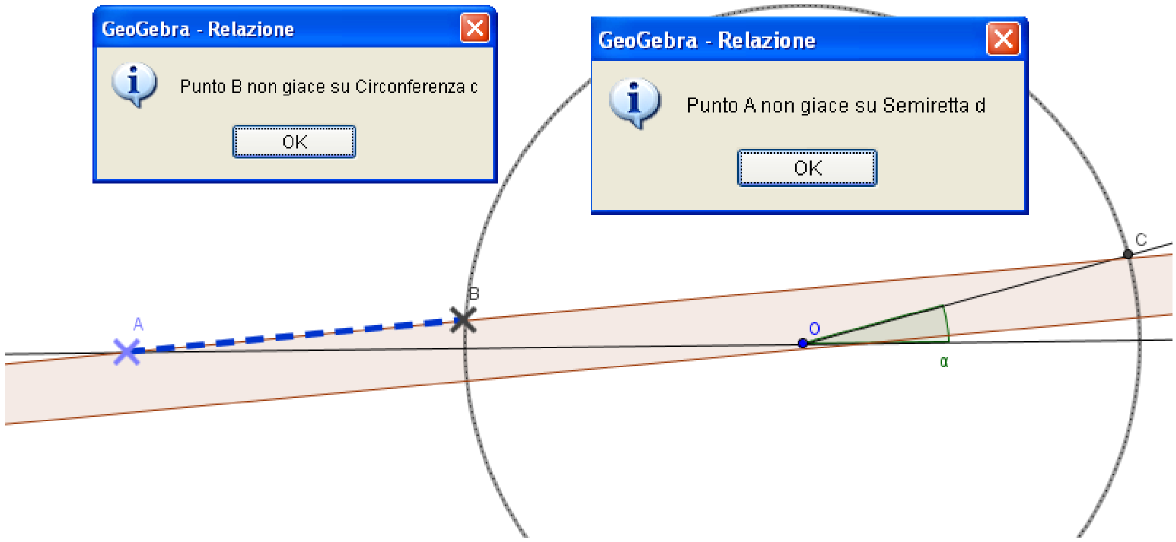
$\gamma=2\alpha$,

quindi $\alpha=3\gamma$.



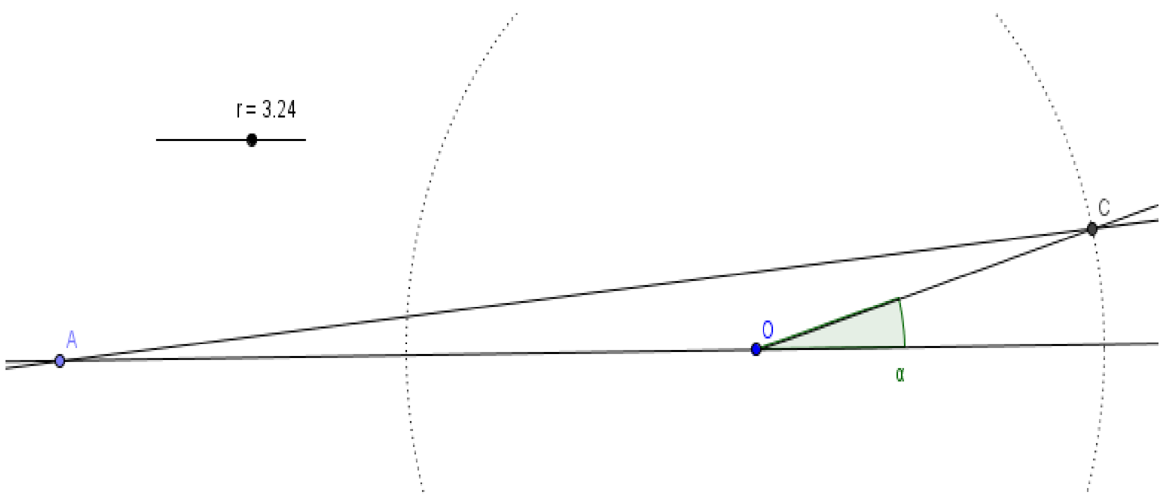
Questa costruzione, sebbene molto chiara per quanto riguarda la sequenze delle istruzioni da compiere, diventa molto complicata da realizzare (anche con Geogebra) materialmente, in quanto non è banale riuscire a fare in modo che il segmento la cui misura è pari al raggio *r* della circonferenza tracciata abbia estremi che giacciano sul prolungamento di uno dei lati dell'angolo e sulla circonferenza.

Se, infatti, si prova a trasportare "ad occhio" questo segmento, nonostante le "apparenze", il software stesso, tramite la funzione *relazione* , ci avverte che i punti non appartengono agli elementi selezionati.

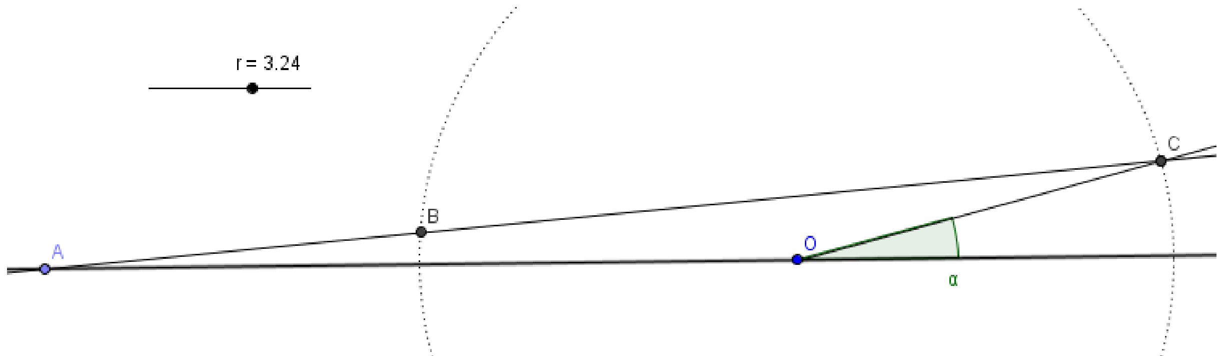


La difficoltà sta infatti nel gestire contemporaneamente tre punti.

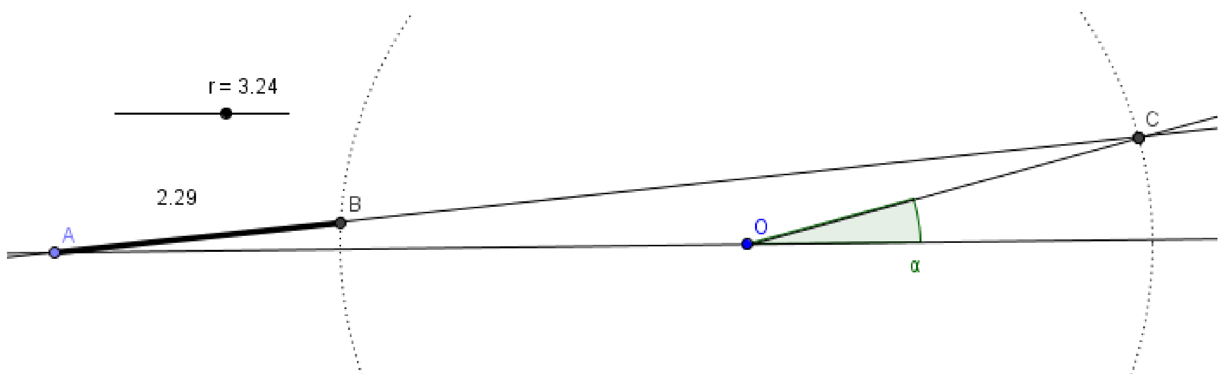
Un modo per realizzare questo disegno in maniera *un po'* più rigorosa sarebbe quello di legare la misura del raggio *r* ad uno slider. Quindi tracciare una retta per C e per un punto generico passante per il prolungamento di un lato dell'angolo.



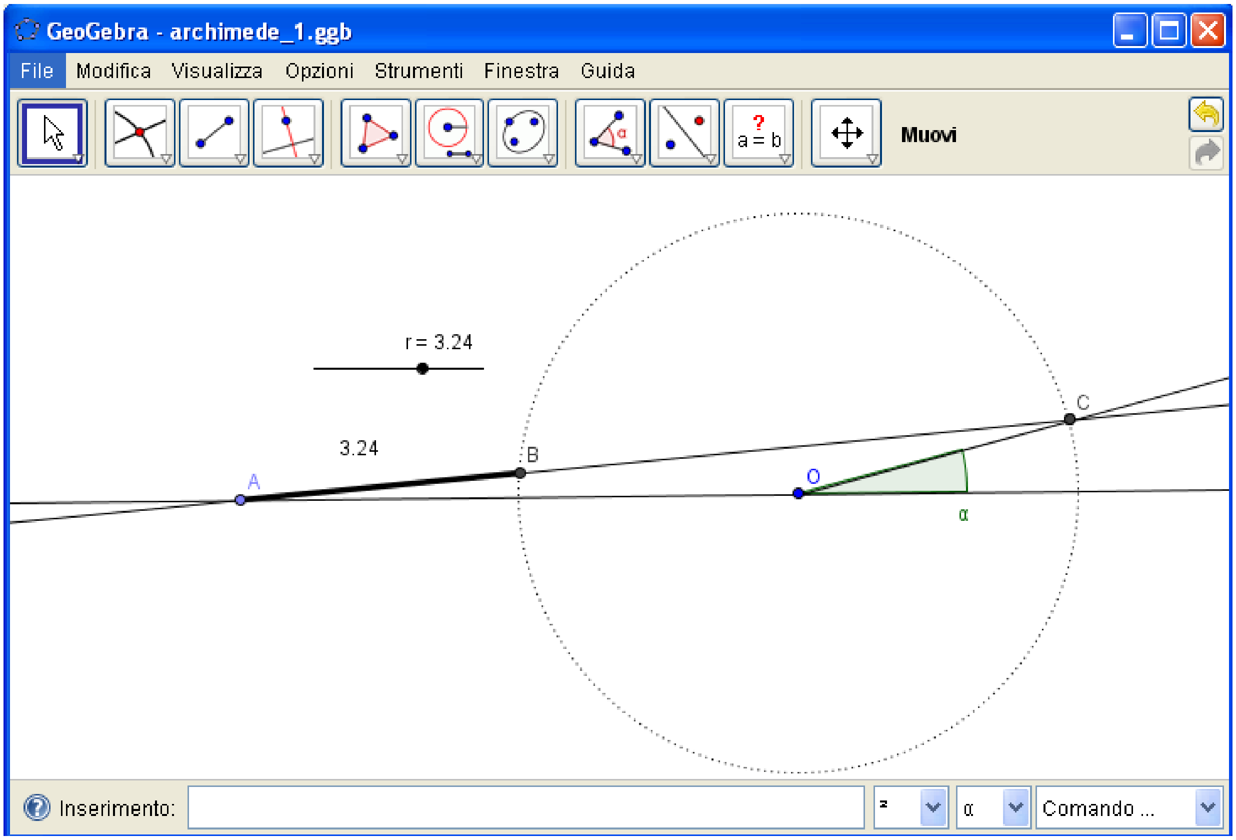
Segnare quindi con B l'intersezione tra questa nuova retta e la circonferenza.



Adesso è possibile individuare il segmento AB e quindi il valore della sua lunghezza.



A questo punto si può trascinare il punto A (che è vincolato a giacere sulla retta) fino a quando la misura della lunghezza di AB e la misura del raggio, scelta arbitrariamente attraverso lo slider, coincidano.



Se i valori calcolati e visualizzati da Geogebra fossero corretti, l'angolo OAC sarebbe la terza parte dell'angolo α indicato.

CAPITOLO 5: le sperimentazioni

Introduzione

A seconda dello strumento usato per risolvere un certo esercizio o problema cambia la rappresentazione del numero con cui uno studente si trova a dover lavorare. Le sue rappresentazioni possono essere esatte o approssimate. Come abbiamo visto (capitolo 3, in particolare pag. 46) però, non sempre è evidente quale rappresentazione si stia effettivamente utilizzando, in particolar modo quando si impiegano i software.

Al fine di analizzare il comportamento degli studenti di fronte alla possibilità di utilizzare strumenti e strategie diverse per risolvere un problema, abbiamo progettato e svolto due sperimentazioni con l'obiettivo di esporre gli studenti intervistati a diverse rappresentazioni del numero: alcune volte quella esatta altre quella approssimata. Le diverse rappresentazioni sono legate alle diverse strategie che verranno proposte agli studenti per risolvere i problemi proposti. Le strategie scelte sono state esclusivamente quelle algebriche o quelle basate su particolari funzioni fornite da un software.

Sono state svolte due sperimentazioni basate entrambe su interviste strutturate suddivise in più fasi:

1. presentazione di un primo esercizio risolto attraverso due strategie risolutive;
2. somministrazione di un esercizio da svolgere scegliendo autonomamente la strategia

Studenti coinvolti

Sono stati coinvolti studenti frequentati tutti il secondo biennio o l'ultimo anno del liceo scientifico di varie scuole di Palermo. Poiché la seconda sperimentazione è stata proposta anche in modalità esclusivamente on-line, mediante video e moduli da compilare, sono stati intervistati anche una decina di studenti di un liceo scientifico di Treviso.

Per quanto riguarda la prima intervista, è stato possibile ulteriormente rivolgerla agli studenti in coppie in presenza di un insegnante moderatore.

Software utilizzati

La prima sperimentazione fa uso del software excel ed in particolare della possibilità di inglobare nello stesso foglio tabelle e grafici.

La seconda sperimentazione fa uso di Geogebra. In questo caso si ha, oltre alla finestra principale in cui è presente il disegno su cui si può operare, una finestra più piccola, denominata "algebra" all'interno della quale è possibile leggere le misure dei segmenti rappresentate nel foglio.

Mentre nel software excel lo studente potrebbe verificare il tipo di operazioni svolte per risolvere l'esercizio per mezzo del software, per quel che riguarda il software Geogebra, sebbene l'approccio grafico sia maggiormente enfatizzato, lo svolgimento dell'esercizio presentato è meno controllabile da parte dello studente in quanto si dovrà limitare a trascinare pochi elementi già precostruiti.

È ancora da notare che mentre in Excel nello stesso foglio sono presentati diversi registri linguistici differenti, contemporaneamente e in maniera molto chiara, in geogebra, seppure questo aspetto sia ugualmente presente, appare meno evidente.

Gli studenti intervistati frequentano tutti il secondo biennio del liceo scientifico ma in classi diverse. Nella prima sperimentazione tutti gli studenti intervistati hanno affrontato l'intervista in presenza di un insegnante. Nella seconda sperimentazione invece c'è stata la possibilità di svolgere l'intervista on-line attraverso video e moduli da compilare per coinvolgere come dicevo, alcuni studenti frequentanti licei scientifici di Treviso.

La tabella che segue riassume le caratteristiche dei due software che ci serviranno per descrivere le sperimentazioni effettuate.

	Excel	Geogebra
Approssimazione dei numeri	Ogni cella richiede una formattazione. Per default appaiono cinque cifre decimali; se la cella è impostata nell'opzione "numero" allora è possibile scegliere il numero di cifre decimali da visualizzare.	I numeri possono essere associati a misure di segmenti, a parametri e agli *slider*. Mentre nei primi due casi il numero di cifre decimali è rigorosamente 2, per quanto riguarda gli *slider* è possibile indicare nel campo *step* cifre con un numero maggiore di cifre decimali.
Registri linguistici	In excel il foglio di calcolo si può riempire come si vuole. Nella sperimentazione proposta si visualizzano tabelle e grafici che occupano lo stesso spazio e dunque appaiono ugualmente importanti.	In geogebra sono visualizzabili le seguenti finestre oltre quella centrale dedicata al disegno e non disattivabile: algebra e calcolo. Appaiono, comunque, per lo spazio che occupano sullo schermo (meno spazio, ai margini), meno importanti e, ad ogni modo, dipendenti da quella centrale.
Possibilità di interazione nelle sperimentazioni proposte	Minima. Tuttavia lo studente può visualizzare cosa nascondono le celle e, anche se non specificato nelle consegne, potrebbe facilmente modificare alcuni campi.	Minima. Lo studente riceve il foglio con le costruzioni già pronte. I vari passaggi sono raccontati dal docente ma lo studente non può svolgerli autonomamente a meno di non aprire un nuovo foglio.

La prima sperimentazione

La prima sperimentazione è stata condotta su diverse classi del terzo anno di liceo scientifico intervistando circa 70 studenti tutti tra i 15 e i 16 anni. L'obiettivo specifico era studiare se e in che modo la scelta tra un procedimento *carta e penna* o attraverso un *software* condizioni lo studente nella risoluzione di un esercizio.

È stato usato un foglio excel le cui celle sono state formattate in modo da far visualizzare e prendere in considerazioni un certo numero di cifre dopo la virgola come si evince dalla figura 16.

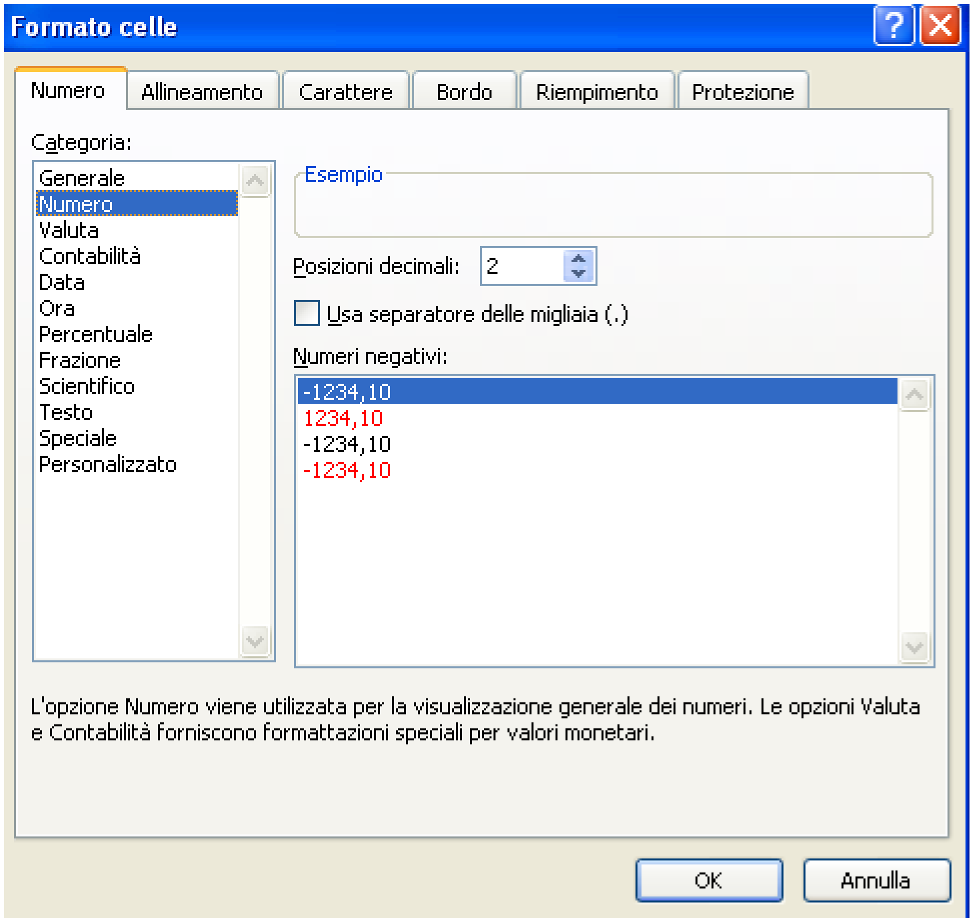


Figura 16

Nel corso di questa sperimentazione ho scelto di usare come base di partenza un esercizio svolto scelto da uno dei libri di testo per licei scientifici attualmente più in voga[15].

È importante precisare che lo studente non si deve occupare affatto di come il software funzioni visto che tutte le formule, gli schemi e le impostazioni sono già stabilite. Da un certo punto di vista il suo funzionamento può ricalcare quello legato alle tecniche '*push button*' (Lagrange, 2005) per cui la libertà dello studente risulta essere molto limitata. Tuttavia uno studente che sappia lavorare su un foglio di calcolo e che decida di modificare le impostazioni iniziali si potrebbe trovare in

[15] Fraschini, R. Grazzi, G., 2011, Matematica per i licei scientifici, Altas, vol. 2.

una condizione completamente diversa. Questo tipo di situazione potrebbe essere assimilata invece a quella di *micromondo* (Noss & Hoyles, 1997).

Gli studenti intervistati hanno dovuto affrontare due problemi la cui strategia risolutiva è nota in quanto ritenuta *standard* per risolvere una certa categoria di problemi sulla *condizione di tangenza* rispetto ad una curva. Ecco in particolare lo schema risolutivo proposto dal libro di testo da cui abbiamo estratto l'esercizio:

1. intersezione tra la parabola e la generica retta passante per un punto;
2. determinazione di un'equazione di secondo grado;
3. studio del discriminante (condizione di tangenza).

È un tipo di esercizio molto comune nel curricolo scolastico e viene riproposto in modo ripetitivo e frequente nei libri di testo nei quali viene suggerita una visione puramente "strumentale" della matematica (Skempt, 1976).

Sono stati proposti agli studenti due problemi che consistono entrambi nella individuazione dell'unico punto di intersezione tra una retta e una parabola. Tutti gli studenti erano abituati a risolvere questo genere di esercizi in ambiente carta e penna.

In questa ricerca è stato fornito allo studente un percorso fortemente strutturato: che lo ha "costretto" a seguire dei passaggi obbligati.

La sperimentazione che andrò a descrivere quindi si può schematizzare attraverso tre fasi ben distinte.

Primo step

La prima parte della sperimentazione consiste nella somministrazione di un foglio che contiene il testo di un esercizio riguardante la tangenza tra una retta e una parabola e una consegna che chiede di commentare tale testo. Precisamente è stata presentata una copia fotostatica dell'esercizio come riportato nella figura 17.

II Esempio

Consideriamo la parabola di equazione $y = x^2 + 4x - 5$ e la retta di equazione $y = 6(x - 1)$.
Risolviamo il sistema formato da queste due equazioni

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x - 5 \\ y = 6x - 6 \end{cases}$$

Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ y = 6x - 6 \end{cases}$$

La prima equazione ha il discriminante nullo; questo significa che il sistema ha due soluzioni reali ma coincidenti

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Vi è dunque un solo punto di intersezione, $T(1,0)$, fra la parabola e la retta (***figura 27***).

Figura 27

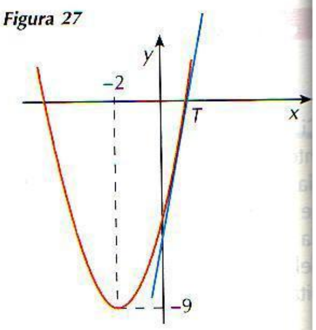


Figura 17

Ritengo importante sottolineare l'importanza dell'immagine affiancata allo svolgimento del problema: sono rappresentate la retta e la parabola con due colori diversi, rispettivamente rosso e blu. Che le due curve siano tangenti non è per nulla evidente da questa immagine. La sovrapposizione dei due colori non sembra certo circoscrivibile a un punto - o quanto meno ad una zona molto limitata; sembra piuttosto che le due curve abbiano diversi punti in comune.

Sullo stesso foglio, subito dopo lo svolgimento dell'esercizio è stato richiesto di commentare la soluzione presentata dagli autori del libro di testo. Tale soluzione si sviluppa in tre passaggi per ciascuno dei quali si chiede un commento specifico rispondente alle domande seguenti.

1° passaggio: perché si può utilizzare un sistema di due equazioni?

2° passaggio: cosa significa sistema equivalente?

3° passaggio: perché se il delta è uguale a zero concludiamo che esiste un solo punto di intersezione?

La consegna che è stata assegnata agli studenti dal professore, a voce, è stata di rispondere alle tre domande con un breve testo di non più di cinque righe.

Il professore che ha seguito lo svolgimento del test ha ripetuto più volte di utilizzare qualsiasi linguaggio gli studenti ritenessero opportuno e che non era necessario il ricorso a termini tecnici.

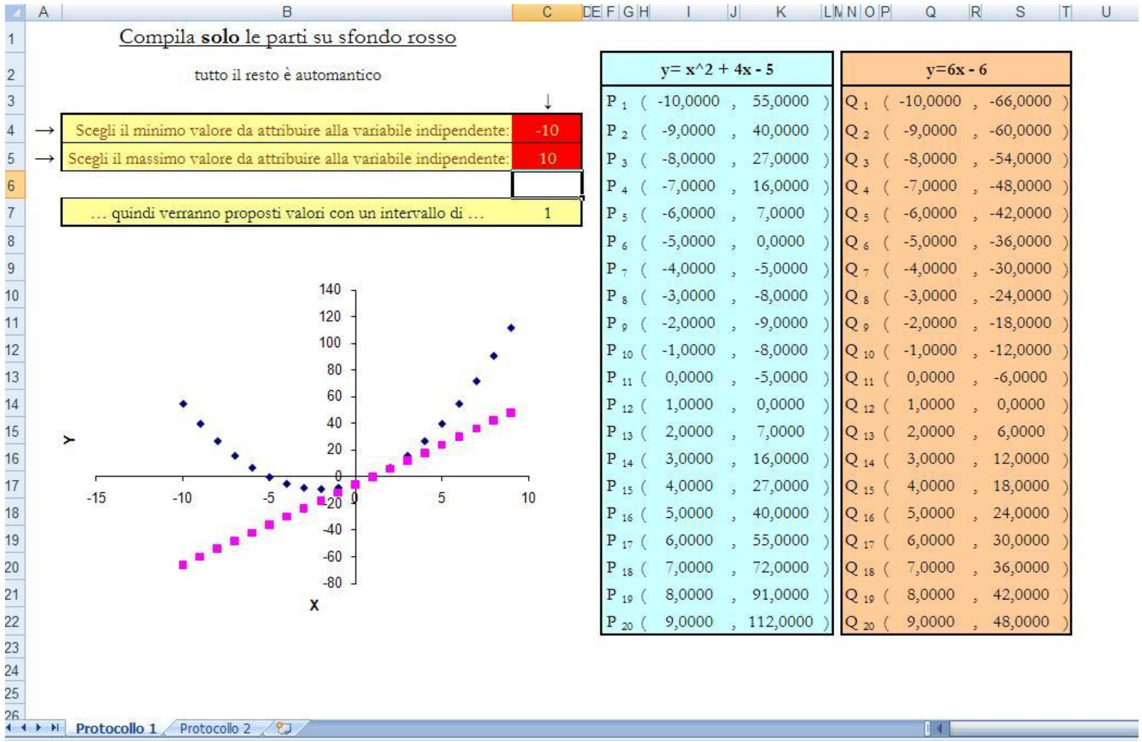
Alla fine di questa prima parte gli studenti ricevevano una seconda consegna:

Secondo step

Questa fase si è svolta all'interno di un aula di informatica cercando possibilmente di dotare ogni studente di un computer; qualora due studenti abbiano dovuto utilizzare lo stesso computer, a causa dell'esiguità del numero di macchine, ognuno di loro ha dovuto presentare singolarmente il proprio elaborato.

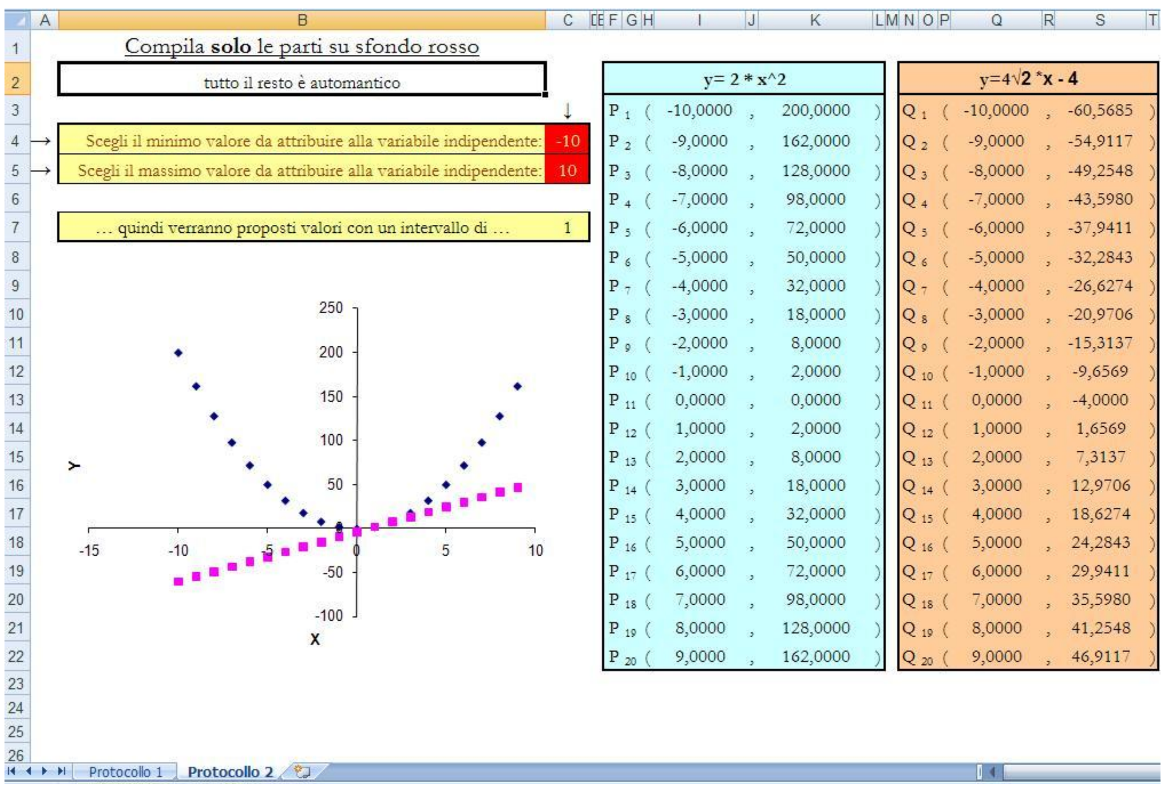
Su ogni computer è stato lanciato dai ragazzi il software Excel predisposto per lo svolgimento della sperimentazione.

Il file Excel si presenta in modo molto semplice, essendo composto da due fogli relativi al primo e al secondo esercizio da affrontare. Ogni foglio era poi contrassegnato dall'etichetta (visualizzata in basso a destra) *procollo 1* e *protocollo 2*. (rispettivamente in figura 18 e 19)



y= x^2 + 4x - 5			y=6x - 6		
P 1	-10,0000	55,0000	Q 1	-10,0000	-66,0000
P 2	-9,0000	40,0000	Q 2	-9,0000	-60,0000
P 3	-8,0000	27,0000	Q 3	-8,0000	-54,0000
P 4	-7,0000	16,0000	Q 4	-7,0000	-48,0000
P 5	-6,0000	7,0000	Q 5	-6,0000	-42,0000
P 6	-5,0000	0,0000	Q 6	-5,0000	-36,0000
P 7	-4,0000	-5,0000	Q 7	-4,0000	-30,0000
P 8	-3,0000	-8,0000	Q 8	-3,0000	-24,0000
P 9	-2,0000	-9,0000	Q 9	-2,0000	-18,0000
P 10	-1,0000	-8,0000	Q 10	-1,0000	-12,0000
P 11	0,0000	-5,0000	Q 11	0,0000	-6,0000
P 12	1,0000	0,0000	Q 12	1,0000	0,0000
P 13	2,0000	7,0000	Q 13	2,0000	6,0000
P 14	3,0000	16,0000	Q 14	3,0000	12,0000
P 15	4,0000	27,0000	Q 15	4,0000	18,0000
P 16	5,0000	40,0000	Q 16	5,0000	24,0000
P 17	6,0000	55,0000	Q 17	6,0000	30,0000
P 18	7,0000	72,0000	Q 18	7,0000	36,0000
P 19	8,0000	91,0000	Q 19	8,0000	42,0000
P 20	9,0000	112,0000	Q 20	9,0000	48,0000

Figura 18



y= 2 * x^2			y=4√2 *x - 4		
P 1	-10,0000	200,0000	Q 1	-10,0000	-60,5685
P 2	-9,0000	162,0000	Q 2	-9,0000	-54,9117
P 3	-8,0000	128,0000	Q 3	-8,0000	-49,2548
P 4	-7,0000	98,0000	Q 4	-7,0000	-43,5980
P 5	-6,0000	72,0000	Q 5	-6,0000	-37,9411
P 6	-5,0000	50,0000	Q 6	-5,0000	-32,2843
P 7	-4,0000	32,0000	Q 7	-4,0000	-26,6274
P 8	-3,0000	18,0000	Q 8	-3,0000	-20,9706
P 9	-2,0000	8,0000	Q 9	-2,0000	-15,3137
P 10	-1,0000	2,0000	Q 10	-1,0000	-9,6569
P 11	0,0000	0,0000	Q 11	0,0000	-4,0000
P 12	1,0000	2,0000	Q 12	1,0000	1,6569
P 13	2,0000	8,0000	Q 13	2,0000	7,3137
P 14	3,0000	18,0000	Q 14	3,0000	12,9706
P 15	4,0000	32,0000	Q 15	4,0000	18,6274
P 16	5,0000	50,0000	Q 16	5,0000	24,2843
P 17	6,0000	72,0000	Q 17	6,0000	29,9411
P 18	7,0000	98,0000	Q 18	7,0000	35,5980
P 19	8,0000	128,0000	Q 19	8,0000	41,2548
P 20	9,0000	162,0000	Q 20	9,0000	46,9117

Figura 19

Il contesto della consegna ha una struttura abbastanza rigida; infatti l'unica cosa che gli studenti possono fare è scegliere i due numeri nelle celle rosse che avranno il seguente effetto:

- ridurre o aumentare lo spazio tra un punto e il suo successivo (si noti che i punti in tutto sono venti per ogni curva; il loro numero non è modificabile);
- visualizzare una parte del piano cartesiano piuttosto che un'altra;
- simulare un effetto *zoom* e di conseguenza decidere di avere una visuale "dall'alto" per vedere in linea di massima il comportamento della curva, oppure focalizzare l'attenzione su una zona molto piccola di piano.

È fondamentale osservare che il numero di punti visualizzati nella tabella e sul piano cartesiano rimane costante, venti per ogni curva: è uno dei vincoli imposti dalla sperimentazione. Di conseguenza, come si diceva prima, l'unica cosa che lo studente può fare è aumentare e ridurre lo spazio tra due punti successivi.
Il contesto del problema presenta diversi tipi di rappresentazione degli stessi oggetti matematici, infatti la retta e la parabola vengono rappresentate con un'equazione, con le rispettive curve (o meglio con due insiemi finiti di punti del piano), e mediante tabelle.
Ancora risulta importante osservare che:

- i punti rappresentati nel grafico di excel non hanno nulla a che vedere con il punto adimensionale euclideo, in quanto visualizziamo piuttosto dei grossi quadratini;
- i punti sono rappresentati nella tabella da numeri che a loro volta sono rappresentati in forma decimale finita, con quattro cifre dopo la virgola.

Per quanto riguarda il grafico precostituito si è scelto un grafico a dispersione XY che non unisse i punti tra loro. Si è quindi scelto di elaborare i fogli di calcolo in modo che fosse più chiara possibile la corrispondenza tra punto rappresentato nel grafico e punto rappresentato nella tabella. Inoltre si è cercato di evitare di indurre l'idea della continuità che non può essere elaborata né rappresentata dagli strumenti in uso (le funzioni che verranno esaminate sono continue su tutto il campo dei reali).

La domanda proposta dal professore in classe con gli studenti, riferita al file excel è stata:

«Utilizzando il file excel, è possibile individuare il punto comune tra la retta e la parabola? E, sempre utilizzando excel, è possibile dimostrare che il punto di intersezione è unico?»

Gli studenti hanno dovuto rispondere a questa domanda per iscritto in maniera possibilmente argomentata.

Terzo step

L'ultima parte del percorso progettato per questa ricerca riguarda la somministrazione di un esercizio molto simile al precedente.

Il professore, in classe con gli studenti, ha chiesto di

« Determinare, se esistono, quante sono le intersezioni tra la parabola e la retta .»

Non è stata specificata una strategia di risoluzione. Ai molti studenti che hanno chiesto quale fosse da preferire il docente ha risposto che avevano la facoltà di sentirsi liberi di utilizzare quella a loro più congeniale, evidenziando però che la presenza di un secondo foglio di excel, identico al primo ma che elabora le curve relative al nuovo esercizio, che può essere utilizzato per risolvere il problema.

Il problema proposto è dunque lo stesso del precedente. Ciò che cambia, rispetto al primo esercizio, è solamente che il punto di intersezione tra queste due curve è rappresentato da un numero irrazionale.

La seconda sperimentazione

La sperimentazione è stata condotta proponendo un test guidato a circa 60 studenti degli ultimi anni del liceo scientifico in alcune città italiane (tra i 16 e i 18 anni a Palermo, Trapani e Treviso). Gli studenti sono stati invitati a seguire, con la supervisione di un docente – il quale non conosceva contenuti e finalità della sperimentazione – un preciso percorso interattivo e multimediale proposto all'interno di un sito internet. Il percorso proposto agli studenti è suddiviso in quattro parti durante le quali gli alunni hanno dovuto documentare le proprie argomentazioni.

Le fasi sono le seguenti:

- proposta dei testi di due problemi e richiesta agli studenti di scrivere in che modo si intende risolvere il problema;
- esposizione (tramite testi esplicativi e modalità video) di due strategie risolutive del primo problema;
- richiesta allo studente di risolvere autonomamente il secondo problema;
- richiesta di formulare per iscritto le proprie considerazioni sulle due diverse strategie che verranno proposte dall'insegnante.

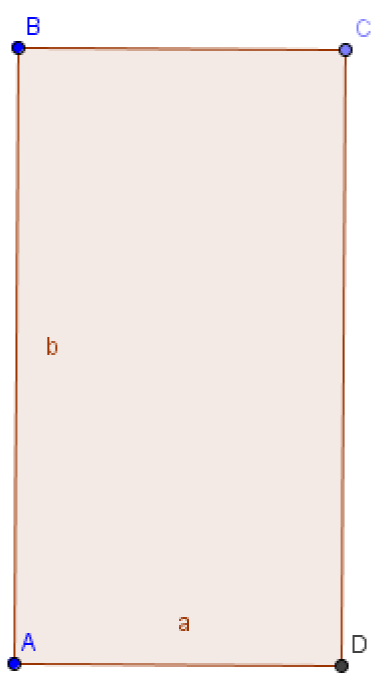
È importate notare che le strategie di cui si parla sono legate allo strumento di cui si fa uso. Si è preferito non impiegare all'interno dei testi indirizzati ai ragazzi il termine "strumento" per evitare fraintendimenti legati al significato del termine.

Prima fase: la presentazione di due strategie e di due strumenti

I due problemi proposti agli studenti sono molto comuni nel curricolo dei licei scientifici italiani ed è possibile trovarli in diversi libri di testo. I problemi sono i seguenti:

1. determinare, tra tutti i rettangoli aventi lo stesso perimetro, quello di area massima;
2. determinare, tra tutti i triangoli di ipotenusa nota, quello che ha massimo il valore del rapporto fra la somma dei cateti e l'ipotenusa.

Preciso immediatamente che lo scopo delle interviste non era quello di avere informazioni sulle capacità degli studenti intervistati nel *problem solving*.
L'obiettivo consiste nel ricreare un contesto didattico nel quale la risoluzione di questi comuni problemi di matematica richiami alla mente la problematicità della scelta di un processo risolutivo mediato da uno strumento piuttosto che da un altro.
I due strumenti in uso sono: la risoluzione tramite formalismo algebrico e quella mediante il software Geogebra. La domanda cui si vuole rispondere è dunque se la scelta di uno strumento, a causa della sua capacità di calcolo, induca lo studente ad argomentare in funzione di esso e quindi a generalizzare correttamente.



Ho dato un po' di tempo (15 minuti) per formulare congetture, terminato il quale io stesso ho fornito due diverse strategie per risolvere gli esercizi. Gli alunni potevano disporre di computer con software quali Excel e Geogebra.
La prima strategia suggerita è quella grafico-analitica

proposta da ogni libro di testo. A seconda dell'età degli studenti cui è somministrato il test è stata proposta in maniera diversa.

I due problemi si possono risolvere algebricamente mediante procedure analoghe; per sinteticità la descriverò solo quella relativa al primo problema.

Dunque, la prima strategia, che viene solitamente proposta dai manuali, è la seguente.

Indichiamo con *p* il semiperimetro;

$$p = a + b;\ b = p - a;$$
$$A = a \cdot b;$$
$$A = p \cdot a - a^2.$$

Se consideriamo questa espressione una funzione dell'area del rettangolo dipendente dalla base *a*, possiamo scrivere: $A(a) = \mathrm{p} \cdot a - a^2$. A questo punto gli studenti devono riuscire a riconoscere l'equazione di una parabola: $y(x) = \mathrm{p} \cdot x - x^2$. Gli allievi del terzo anno (15-16 anni) possono studiare la parabola associata (si noti come perdano così il contatto con l'oggetto del problema): una parabola con concavità rivolta verso il basso e passante per l'origine degli assi. Sull'asse delle *x* abbiamo una delle dimensioni del rettangolo, sull'asse delle *y* l'area del rettangolo. Il vertice indica il punto più alto e la sua ascissa il valore della base per cui l'area è massima. I ragazzi dell'ultimo anno (17-18) studierebbero la derivata ($y' = p - 2 \cdot x$; $p - 2 \cdot x > 0$) e tratterebbero un problema di analisi di massimo e di minimo.

Entrambi i procedimenti conducono a concludere che tra tutti i rettangoli isoperimetrici quello di area massima è quello con le dimensioni uguali: il quadrato. La seconda strategia fa uso del software Geogebra. Se utilizziamo la funzione *slider*, collegando il suo valore ad una delle dimensioni del rettangolo (nel nostro esempio la base) siamo in grado di modificare le misure dell'altra dimensione mantenendo costante il valore del semiperimetro. Quest'ultimo peraltro si può associare al valore di un ulteriore slider per poter esemplificare con facilità classi di rettangoli con perimetri differenti.

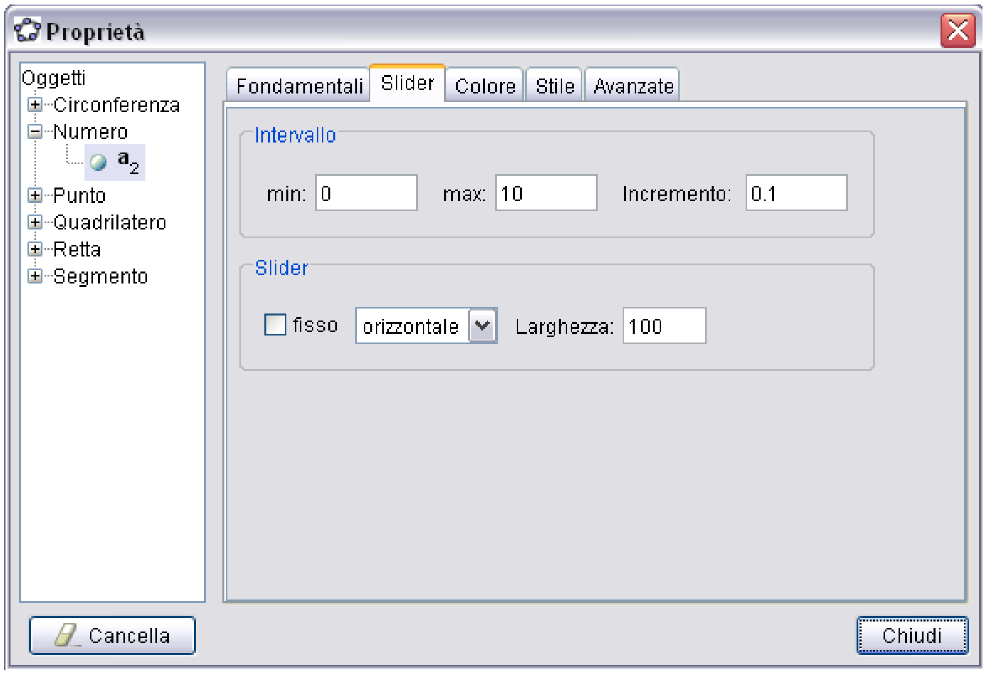


Figura 20

esercizio1

Determina, tra tutti i rettangoli aventi lo stesso perimetro, quello di area massima.

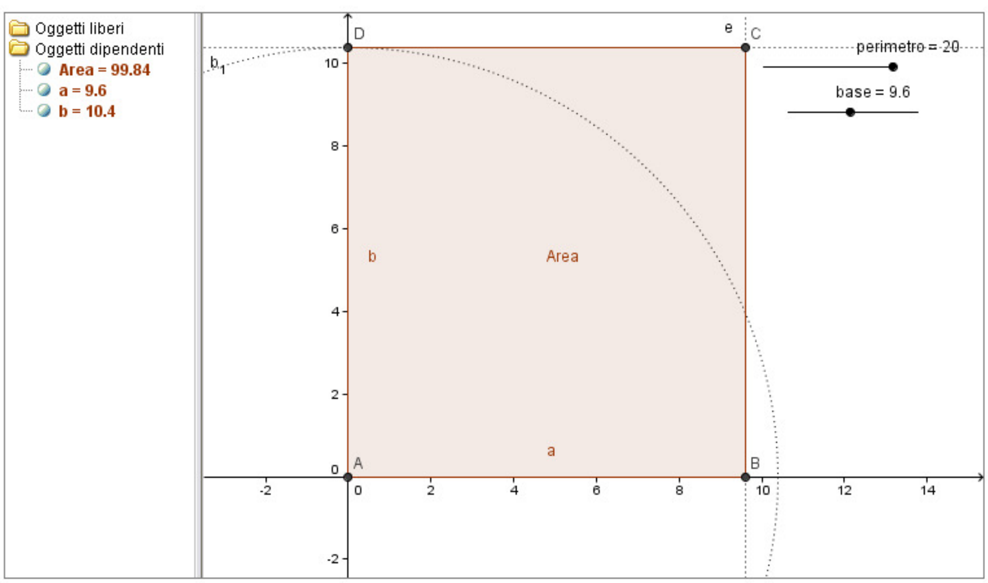


Figura 21

È importante far rilevare agli studenti che bisogna stabilire preliminarmente il minimo e il massimo valore che è possibile attribuire, attraverso lo slider (il *min* e il *max* indicato nella figura 20) nonché l'incremento dello slider. Nel caso descritto in figura *min* = 0; *max* = 10; *incremento* = 0.1, avremo esattamente 100 rettangoli per ogni valore del perimetro. Al variare della base, nella sezione a sinistra della finestra di Geogebra, si possono visualizzare istantaneamente, al cambiare dei dati, tutti i valori oltre che quelli dell'area calcolata (figura 21).
La particolarità e l'esigenza di inserire il secondo problema consiste nel tipo di soluzione: infatti mentre nel primo esercizio la soluzione può essere rappresentata da un numero razionale, nel secondo è un numero irrazionale che, ovviamente, avrebbe messo in crisi un possibile approccio con il software utilizzato perché sarebbe apparso approssimato.

Seconda fase: un nuovo problema

Il secondo esercizio risulta essere risolto determinando che il triangolo cercato è isoscele. È fondamentale notare però che attraverso il file di geogebra fornito agli studenti (all'interno del quale basta trascinare il punto *P*) in corrispondenza al valore massimo del rapporto, i cateti possono assumere più valori come si evince dalle seguenti figure. Le frecce rossa e blu indicano, nelle due figure che seguono (la figura 22 e 23), misure diversi dei due cateti che individuano lo stesso rapporto massimo.

Determina, tra tutti i triangoli con la stessa ipotenusa, quello che ha massimo il valore del rapporto fra la somma dei cateti e l'ipotenusa.

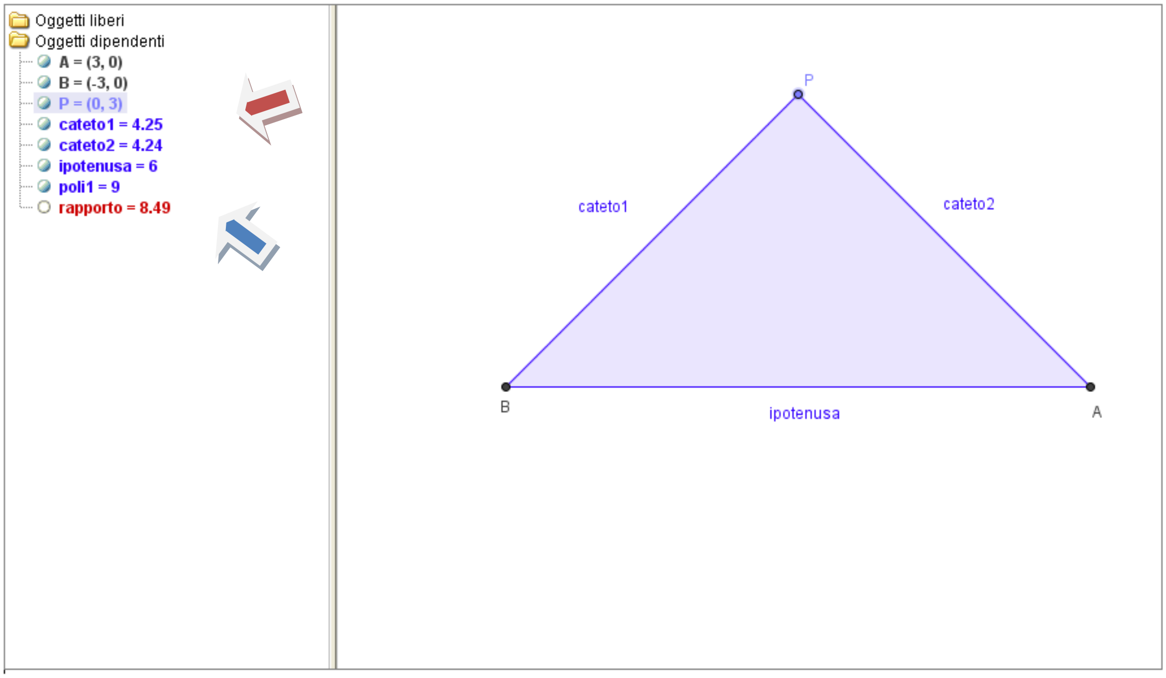


Figura 22

Determina, tra tutti i triangoli con la stessa ipotenusa, quello che ha massimo il valore del rapporto fra la somma dei cateti e l'ipotenusa.

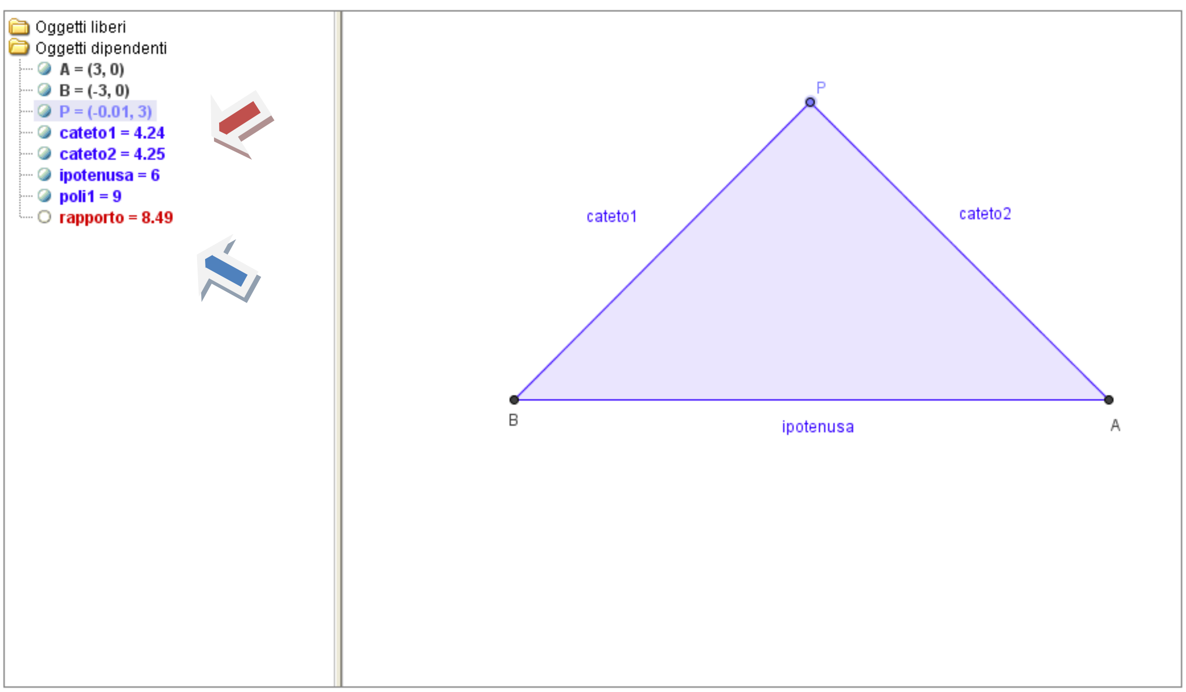


Figura 23

Per quanto riguarda il secondo problema non ho fornito alcuna strategia, ma ho chiesto agli studenti intervistati di provare a risolvere o almeno proporre uno schema argomentativo. Ovviamente è stato consentito l'uso di Geogebra. Solo a questo punto ho chiesto agli studenti di compilare un questionario.
Gli studenti, dopo aver elaborato congetture, riflettuto sulle due strategie proposte ed infine aver provato a risolvere autonomamente il secondo esercizio, hanno dovuto rispondere alle seguenti domande. È stato specificato che non erano tenuti ad utilizzare necessariamente una terminologia specifica.
Le domande sono le seguenti:

1. Quali, tra le due strategie proposte, ritieni migliore?
2. Con quale strategia hai risolto il secondo esercizio?
3. Se ti venisse chiesto di risolvere questo esercizio durante una verifica scolastica e ti fosse concesso l'uso del computer e di geogebra, quale strategia prederiresti usare?

La prima domanda si riferisce alle convinzioni dello studente sulla base di quello che ha studiato in classe, delle nozioni apprese dal libro di testo e dall'insegnante. La seconda domanda è molto esplicita: è utile per conoscere se ci sono difformità tra ciò che lo studente crede corretto e ciò che riesce a fare materialmente. La terza domanda intende riassumere le prime due nel senso che tende ad indagare come gli studenti riescano a conciliare l'aspetto istituzionale delle regole cha hanno appreso a scuola con le proprie convinzioni personali.

L’analisi a priori

Al fine di disporre di categorie di analisi per gli elaborati che si sarebbero ottenuti nelle diverse sperimentazioni, è stata svolta un’analisi a priori delle possibili risposte. L'analisi a priori è un'analisi delle possibili rappresentazioni epistemologiche dei comportamenti concepibili (corretti e non corretti) da parte degli studenti. In altre parole, l’analisi a priori suggerisce un modello al quale applicheremo l’analisi implicativa che ci permetterà di individuare profili significativi (Spagnolo, 2005).

Per far questo è utile mettere in relazione ogni comportamento ipotizzato con ognuno degli studenti intervistati come nella tabella che segue.

I numeri 1 e 0 corrispondono all’eventualità che lo studente abbia applicato o meno un certo comportamento così come nelle esemplificazioni proposte nella tabella seguente.

Studente	Comportamento 1	Comportamento 2	Comportamento …	Comportamento *m*
1	1	0	0	0
2	0	0	0	1
...	…	…	…	…
n	1	0	1	0

È utile precisare che probabilmente alcuni studenti potranno rientrare all’interno di diverse categorie di comportamenti. Per cui la domanda cui effettivamente rispondere per ogni studente è: *lo studente k si è comportato nel modo 1?; lo studente k si è comportato nel modo 2?;…*

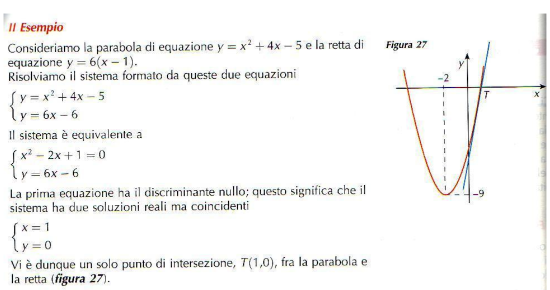
L'analisi implicativa risponde alla domanda formulata da R. Gras (1996) nel seguente modo: "Date delle variabili binarie a e b, in quale misura posso assicurare che in una popolazione, da ogni osservazione di a segue necessariamente quella di b?". O anche in maniera più lapidaria : "E' vero che se a allora b?" (Spagnolo, 1997).

Nel nostro caso ogni comportamento ipotizzato nell'analisi a priori diventa una variabile per cui le domande appena espresse possono essere riformulate come segue: *è vero che un comportamento x implica un comportamento y?* O, più semplicemente, *è vero che gli studenti che assumono un comportamento x probabilmente assumeranno anche un comportamento y?*

Per rispondere a queste domande è stato adoperato lo CHIC (Classification Hiérarchique Implicative et Cohésive), un programma elaborato dal gruppo I.R.MA.R.[16] che permette (Spagnolo, 1997) una chiara visualizzazione dei rapporti di similarità e di implicazione tra i comportamenti ipotizzati (si avranno rispettivamente *l'albero delle similarità* e *l'albero gerarchico* che verranno descritti, per le sperimentazioni presentante, nel prossimo capitolo).

Le categorie di comportamento

Presenterò di seguito i comportamenti ipotizzati per entrambe le sperimentazioni.

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">PRIMA SPERIMENTAZIONE</td></tr>
<tr><td>
II Esempio
Consideriamo la parabola di equazione $y = x^2 + 4x - 5$ e la retta di equazione $y = 6(x - 1)$.
Risolviamo il sistema formato da queste due equazioni
$\begin{cases} y = x^2 + 4x - 5 \\ y = 6x - 6 \end{cases}$
Il sistema è equivalente a
$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ y = 6x - 6 \end{cases}$
La prima equazione ha il discriminante nullo; questo significa che il sistema ha due soluzioni reali ma coincidenti
$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$
Vi è dunque un solo punto di intersezione, $T(1,0)$, fra la parabola e la retta (***figura 27***).
Figura 27
</td><td align="center">**PRIMO STEP**

Agli studenti viene consegnata copia di un esercizio già svolto tratta da un libro di testo.</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
</table>

[16] Istituto di ricerca Matematica di Rennes, Università di Rennes

Comportamenti relativi al semplice commento delle operazioni.		
Codice	**Comportamento**	**Eventuali esemplificazioni**
(A1a)1	Non commenta	
(A1a)2	Si limita a descrivere le operazioni proposte dal testo.	Per esempio: per il primo passaggio lo studente si limita a scrivere che si tratta di un sistema; per il secondo passaggio specifica che si calcola il delta…
(A1a)3	Coglie parzialmente il significato dei passaggi proposti dal testo e argomenta in modo vago.	*"poiché dobbiamo trovare il punto di intersezione facciamo il sistema"* oppure "*per calcolare l'intersezione facciamo il delta"*
(A1a)4	Descrive dettagliatamente i passaggi e argomenta correttamente i procedimenti.	"*il delta dà informazioni relative al numero di soluzioni di una equazione infatti se il delta fosse maggiore di due…*"
Commenti elaborati da quegli studenti che hanno anche provato a svolgere le operazioni intermedie implicite nel procedimento del libro.		
(A1b)1	Non riesce a determinare il punto e non scrive nulla	
(A1b)2	Prova a svolgere i calcoli ma gli errori che compie non gli permettono di arrivare a conclusioni coerenti con il libro di testo	Alcuni studenti non sono riusciti a compiere i passaggi corretti per risolvere il sistema.
(A1b)3	Riesce a determinare il punto in comune ma non aggiunge altro	Compie correttamente tutti i calcoli previsti dai passaggi indicati dal testo ma non commenta assolutamente nulla
(A1b)4	Riesce a determinare il punto in comune argomentando i passaggi svolti.	I calcoli e le argomentazioni sono corrette
SECONDO STEP **Utilizzando un file excel, è possibile individuare il punto comune tra la retta e la parabola? E, sempre utilizzando excel, è possibile dimostrare che il punto di intersezione è unico?**		
(A2)1	Non risponde	
(A2)2	Prova a risolvere l'esercizio analiticamente senza giungere ad una risposta pertinente	Non prova nemmeno a gestire i comandi del software e ripropone lo svolgimento proposto nello step 1
(A2)3	Dichiara di avere provato diverse volte il programma con diversi "*range*" e di aver determinato altri punti in comune	"*dal grafico è evidente che la parabola e la retta si intersecano in più di un punto"*
(A2)4	Si limita ad osservare che nella tabella visualizzata dal calcolatore	"*nella tabella si vede che c'è un solo punto in comune"*; questa frase si riferisce

	era determinato un solo punto in comune	peraltro al punto, o meglio alla coppia di coordinate, che sono visualizzate per default dal software appena lo si apre
(A2)5	Dichiara di avere provato diverse volte il programma con diversi "*range*" e di non aver determinato altri punti in comune	"P*rovando vari valori mi rendo conto che c'è un unico punto di intersezione*". Lo studente descrive due o tre tentativi
(A2)6	Risponde che lo studio del discriminante è sufficiente ad affermare che esiste un unico punto di intersezione	
(A2)7	Attribuisce x_{min} e x_{max} molto prossimi tra loro e vicini al punto di ascissa 1 in modo da avere una visione più dettagliata in una porzione di spazio ben precisa. Deduce che non ci sono altri punti in comune	
(A2)8	Attribuisce x_{min} e x_{max} molto prossimi tra loro e vicini al punto di ascissa 1 in modo da avere una visione più dettagliata in una porzione di spazio ben precisa. Deduce che ci sono altri punti in comune.	
	TERZO STEP **Determinare, se esistono, quante sono le intersezioni tra la parabola e la retta .**	
B1	Non risponde	
B2	Svolge l'esercizio analiticamente senza giungere a una onclusione corretta	
B3	Svolge l'esercizio analiticamente giungendo a determinare il punto di intersezione	
B4	B3 + aggiunge, argomentando, che il punto di intersezione è unico	
B5	Prova ad utilizzare il programma ma non giunge ad una risposta corretta	
B6	Utilizzando il programma, mediante la sola osservazione del grafico, deduce che devono esserci	"*dal grafico si vede chiaramente che…*"

	intersezioni	
B7	Utilizzando il programma, osservando il grafico e i valori nelle tabelle, deduce che devono esserci intersezione ma non è possibile determinarne il numero	“*il grafico è piuttosto difficile perché non è chiaro però dalla tabella sembra che ci sono punti che si sovrappongono”*
B8	Utilizzando il programma, poiché non riesce a trovare due punti uguali nelle due tabelle, deduce che le due curve non si incontrano	“*i punti si avvicinano moltissimo ma non sono proprio uguali”*
B9	Utilizzando il programma, interagendo con il “range”, osservando il grafico e le tabelle, deduce ed argomenta che si determina un punto di intersezione e ne dà un valore approssimato.	*“sembra chiaro adesso che il punto di intersezione è…”*; lo studente descrive alcuni tentativi.
B10	Utilizzando il programma, interagendo con il “range”, osservando il grafico e le tabelle, deduce ed argomenta che probabilmente esiste un punto di intersezione, ponendosi però il problema dell’approssimazione del calcolatore	“*i valori trovati sembrano proprio uguali. Mi sembra però che il procedimento algebrico sia preferibile perché più sicuro”*

SECONDA SPERIMENTAZIONE		
Codice	**Comportamento**	**Eventuali esemplificazioni**
Relativamente ai problemi: **1.** *Determinare, tra tutti i rettangoli aventi lo stesso perimetro, quello di area massima;* **2.** *determinare, tra tutti i triangoli di ipotenusa nota, quello che ha massimo il valore del rapporto fra la somma dei cateti e l’ipotenusa.* **Ritieni migliore la risoluzione algebrica o tramite software?**		

1a	Lo studente considera irrilevante la scelta tra la risoluzione algebrica e quella tramite il software, perché entrambe conducono alla soluzione.	
1b	Lo studente ritiene la seconda strategia assolutamente sbagliata perché il docente lo ha abituato soltanto alla prima	"*la prima strategia mi è più congeniale perché sono abituato ad utilizzarla in classe*"
1c	Lo studente ritiene la seconda strategia assolutamente sbagliata perché il computer non può calcolare precisamente i risultati.	"*la prima strategia è da preferire visto che i calcoli matematici sono più precisi e più attendibili*"
1d	Lo studente ritiene la seconda strategia corretta nel primo esercizio, scorretta nel secondo perché nel primo abbiamo un risultato intero e "preciso" mentre nel secondo il risultato appare approssimato.	"*sono entrambe efficaci però la seconda non riesce a risolvere precisamente il secondo esercizio*"; "*l'uso di geogebra può essere d'aiuto ma nel secondo esercizio c'è bisogno dei calcoli*"
1e	Lo studente considera corrette entrambe le strategie. Tuttavia considera la prima da preferire a causa delle approssimazioni rilevate nei calcoli compiuti dal software.	
1f	Lo studente preferisce la seconda strategia in quanto gli consente di lavorare sugli oggetti matematici realmente citati nel testo del problema (quadrati, rettangoli), invece di quello che succede utilizzando il formalismo algebrico per mezzo del quale bisogna studiarne altri (la parabola)	"*non avrei mai pensato alla parabola…*"
Con quale strategia hai risolto il secondo esercizio?		
2a	Ha usato la prima strategia. Ha svolto l'esercizio per via algebrica	
2b	Ha svolto l'esercizio in entrambi i modi. Non mostra di preferire una delle due.	
2c	Ha usato gli strumenti digitali forniti dal professore per risolvere il	

	problema. Non si è posto il problema delle approssimazioni e dei calcoli elaborati da Geogebra.	
2d	Non risponde / è indeciso / non ha una propria idea al riguardo	
Se ti venisse chiesto di risolvere questo esercizio durante una verifica scolastica e ti fosse concesso l’uso del computer e di geogebra, quale strategia desidereresti usare?		
3a	La prima può essere considerate l’unica valida, dunque non esiste l’alternativa.	*“forse è più efficace la seconda ma sicuramente si deve usare la prima… quindi…”*
3b	La prima è l’unica corretta; tuttavia la seconda consente di concludere prima l’esercizio e può servire per chiarirsi le idee.	“*la prima, anche perché la seconda (che mi sembra più semplice) è applicabile solo al computer*
3c	È indifferente; potrebbe lavorare con l’una piuttosto che con l’altra.	“*sono entrambe efficaci”*
3d	Poiché lo studente non è in grado di risolvere l’esercizio per mezzo della prima strategia, considera la seconda più efficace e quindi preferibile.	“*non sarei mai riuscito a risolvere l’esercizio da solo senza l’aiuto del professore quindi mi piacerebbe poterlo risolvere col computer”*

I comportamenti descritti saranno usati per individuare delle categorie di studenti. Ogni sperimentazione, attraverso l’analisi dei dati che verrà di seguito descritta, produrrà delle categorie che potranno essere confrontate e di cui si discuterà infine la coerenza o meno.

CAPITOLO 6: Risultati

Analisi quantitativa della prima sperimentazione

Sulla base dei comportamenti descritti nell'analisi a priori sono stati analizzati i testi prodotti dagli studenti intervistati; ogni elaborato ha evidenziato uno o più comportamenti tra quelli previsti *a priori* per cui è stato possibile costruire una tabella simile a quella mostrata a pag 77 ed l software CHIC ci ha permesso di pervenire alle seguenti prime conclusioni.

L'elaborazione da parte dello C.H.I.C. consiste nella produzione di un albero di similarità. Nel nostro caso, tale grafo, mostra la presenza solo di alcune parti significative, le sole che riportiamo in figura 24.

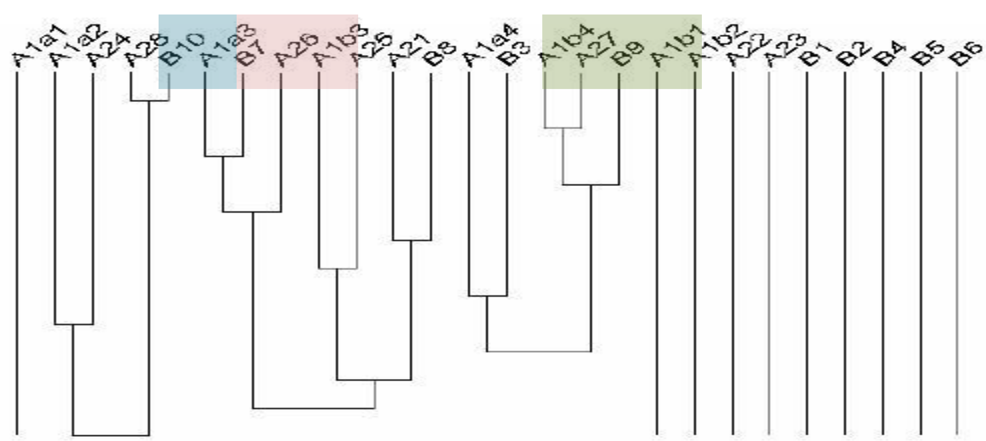
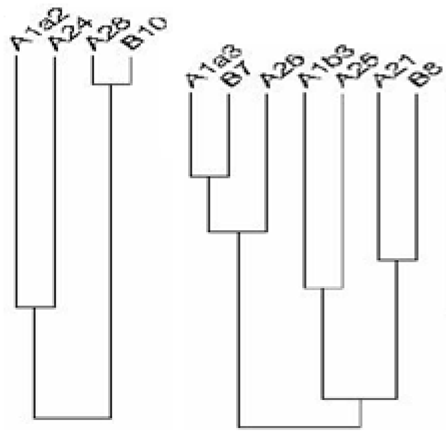
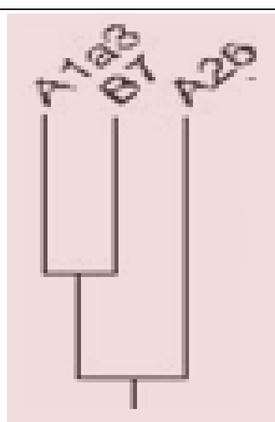
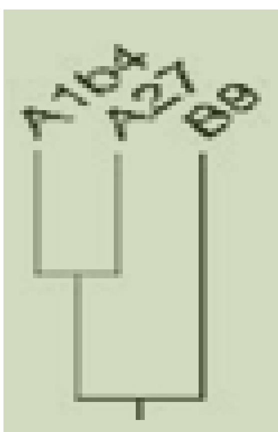


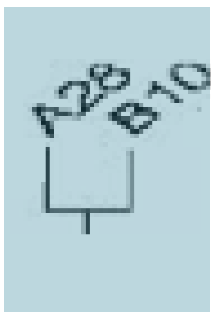
Figura 24

Il grafo elaborato del software collega le variabili nel seguente modo: più è alta la congiunzione tra le variabili, tanto più il software le ha ritenute assimilabili. Ad esempio, è possibile rilevare che gli studenti che hanno evidenziato il comportamento identificato con il codice A28 hanno anche assunto il comportamento B10 e viceversa. Invece i codici da cui partono code che procedono parallelamente tra loro sono da ritenersi assolutamente slegati tra loro.

Il grafo dunque evidenzia il legame tra diversi comportamenti, spesso relativi a fasi diverse delle sperimentazioni, e permette di descrivere categorie di studenti contraddistinti da comportamenti simili. Nella tabella che segue verranno analizzati puntualmente le sezioni del grafo ritenute significative dal software CHIC, le quali verranno affiancate da un profilo di alunno tipo che sintetizza, per ognuna delle sperimentazioni, i comportamenti che lo hanno caratterizzato.

Parte del grafo significativa	**Interpretazione del profilo di uno studente tipo**	**Significato del codice usato nella classificazione**
	Le variabili **(A1a)2** e **(A1a)3** dividono quasi esattamente a metà il campione scelto, per cui, da sole, riescono a rappresentare la quasi totalità degli studenti intervistati. Quasi nessuno fra gli studenti è stato in grado di spiegare o argomentare i passaggi elaborati nell'esercizio svolto dagli autori del libro di testo.	(a1a)2 Si limita a descrivere le operazioni proposte dal testo.
		(a1a)3 Coglie parzialmente il significato dei passaggi proposti dal testo e argomenta in modo vago.
	Gli studenti hanno ignorato la richiesta di dimostrare l'unicità del punto di intersezione nel quesito A sia algebricamente sia con Excel e per le risposte successive non hanno voluto utilizzare il software preferendo	(a1a)3 Coglie parzialmente il significato dei passaggi proposti dal testo e argomenta in modo vago.
		B7 Utilizzando il programma, osservando il grafico e

	rimanere all’interno dell’ambito algebrico.	i valori nelle tabelle, deduce che devono esserci intersezione ma non è possibile determinarne il numero
		(A2)6 Risponde che lo studio del discriminante è sufficiente ad affermare che esiste un unico punto di intersezione
	Gli studenti hanno individuato correttamente il punto di intersezione del test A mediante il software; si sono convinti quasi subito della sua unicità (ricordando d’altra parte l’esercizio svolto algebricamente poco prima). Nel test B hanno ritenuto l’esplorazione mediante software sufficiente per affermare che esiste un solo punto di intersezione e ne hanno dato un valore approssimato.	(A1b)4 Riesce a determinare il punto in comune e conclude che è il punto K determinato nel passaggio precedente
		(A2)7 Attribuisce x_{min} e x_{max} molto prossimi tra loro e vicini al punto di ascissa 1 in modo da avere una visione più dettagliata in una porzione di spazio ben precisa. Deduce che non ci sono altri punti in comune
		B9 Utilizzando il programma, interagendo con il “range”, osservando il grafico e le tabelle, deduce ed argomenta che si determina un punto di intersezione e ne dà un valore

<table>
<tr><td></td><td></td><td>approssimato.</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Gli studenti che hanno utilizzato meglio il software informatico – nel senso che hanno descritto correttamente tutte le operazioni svolte sulle celle –, sono stati in grado di avvicinarsi maggiormente alla soluzione del problema. Questi studenti hanno inoltre tenuto conto dei vincoli del software e delle approssimazioni.</td><td>(A2)8
Attribuisce x_{min} e x_{max} molto prossimi tra loro e vicini al punto di ascissa 1 in modo da avere una visione più dettagliata in una porzione di spazio ben precisa. Deduce che ci sono altri punti in comune.</td></tr>
<tr><td>B10
Utilizzando il programma, interagendo con il “range”, osservando il grafico e le tabelle, deduce ed argomenta che probabilmente esiste un punto di intersezione, ponendosi però il problema dell’approssimazione del calcolatore.</td></tr>
</table>

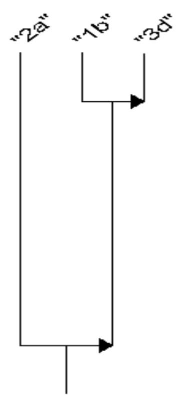
Da questa prima analisi si possono dunque ricavare i seguenti profili:

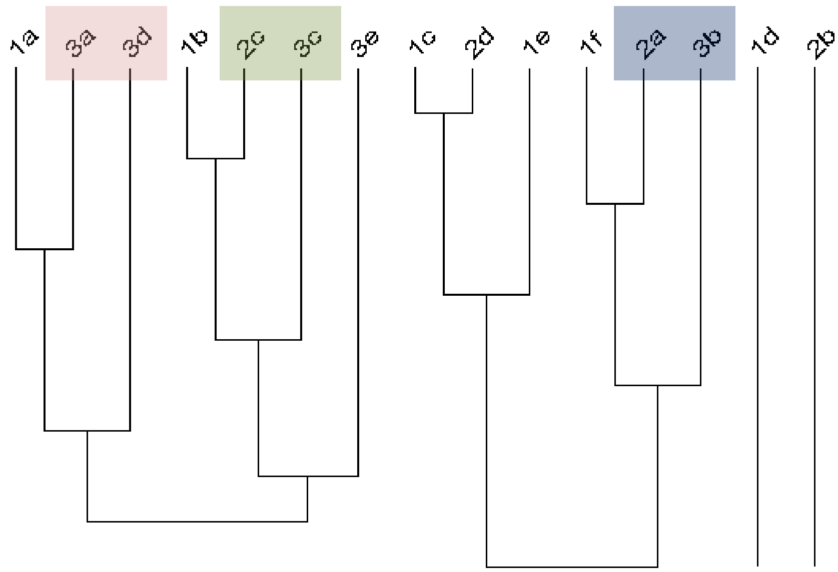
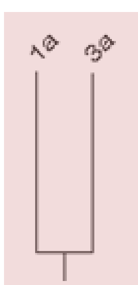
- *rosso*: questi studenti, riconoscono il problema come un problema noto, e dovendolo affrontare hanno preferito restare nel contesto a loro familiare e dunque utilizzando l’algebra. Le strategie dell’algebra a loro note li conducevano a determinare delle soluzioni senza approssimazioni, sia quando si trattava di numeri interi che irrazionali. Hanno perciò preferito non affrontare la questione relativa alla scelta del software. Tuttavia notiamo che al momento di commentare, nella prima parte della sperimentazione i passaggi svolti dal libro di testo, quasi nessuno di questi ha saputo spiegare in modo chiaro il senso dei vari passaggi.

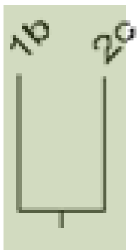
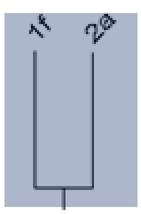
- *verde*: si tratta di quegli studenti che, avendo scelto di usare il software, si sono limitati ad inserire alcuni dati negli spazi dedicati e "frettolosamente" hanno ricavato le informazioni. Per quanto riguarda il primo esercizio sono riusciti a determinare correttamente la soluzione, aiutati anche dal fatto che il risultato fosse già noto, ed hanno espresso immediatamente la propria convinzione nell'unicità del risultato. Per quanto riguarda il secondo esercizio, invece, è stata ritenuta sufficiente una veloce interpretazione dei numeri elaborati dal software che sono stati interpretati tutti come l'approssimazione dello stesso numero irrazionale.
- *blu:* in questo ulteriore profilo inseriamo quegli studenti che, avendo scelto di risolvere il secondo esercizio con il software, hanno discusso lungamente i vari casi che era possibile osservare attraverso l'analisi dei dati. Questi hanno ben individuato i limiti delle approssimazioni e hanno concluso che forse non era opportuno giungere a conclusioni riguardo l'unicità della soluzione tramite il software.

Analisi quantitativa della seconda sperimentazione

Anche per elaborare i dati della seconda sperimentazione è stato utilizzato lo C.H.I.C. attraverso il quale è stato possibile generare non solo *l'albero delle similarità* ma anche quello *gerarchico* (la cui parte significativa è inserita nella tabella seguente). L'analisi di queste elaborazioni ci conduce ad individuare i seguenti profili di studenti riassunti come segue:

<table>
<tr><th colspan="3">Albero gerarchico</th></tr>
<tr><th>Parte del grafo significativa</th><th>Interpretazione sintetica del grafo</th><th>Significato del codice usato nella classificazione</th></tr>
<tr><td rowspan="2">
</td><td rowspan="2">Analizzando l’albero gerarchico qui rappresentato salta agli occhi l’implicazione 1b – 3d che viene calcolata valida con una validità del 99%. L’interpretazione di questo dato potrebbe essere che molti studenti ritengono – perché così è richiesto dagli insegnanti – che il genere di esercizi proposto debba essere risolto solo per via algebrica; tuttavia il loro approccio è meramente strumentale, quindi, avendone l’opportunità userebbero volentieri uno strumento informatico in quanto più semplice o almeno più immediato.</td><td>1b
Lo studente ritiene la seconda strategia assolutamente sbagliata perché il docente lo ha abituato soltanto alla prima</td></tr>
<tr><td>3d
Poiché lo studente non è in grado di risolvere l’esercizio per mezzo della prima strategia, considera la seconda più efficace e quindi preferibile.</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="3">Albero delle similarità</th></tr>
<tr><td colspan="3">
</td></tr>
<tr><th>Parte del grafo significativa</th><th>Interpretazione del profilo di uno studente tipo</th><th>Significato del codice usato nella classificazione</th></tr>
<tr><td rowspan="2">
</td><td rowspan="2">Lo studente dimostra di non ritenere una strategia preferibile ad un’altra. Durante una prova in classe o un esame tuttavia deve essere utilizzata solo la prima.</td><td>1a
Lo studente considera irrilevante la scelta tra la prima e la seconda strategia perché entrambe conducono alla soluzione.</td></tr>
<tr><td>3a
La prima può essere considerata l’unica valida, dunque non esiste l’alternativa.</td></tr>
</table>

	Lo studente è abituato alla prima strategia e convinto, per via della sua ortodossia, che sia l'unica strada percorribile; tuttavia ritiene che i risultati numerici cui conducono entrambe siano identici.	1b Lo studente ritiene la seconda strategia assolutamente sbagliata perché il docente lo ha abituato soltanto alla prima.
		2c Ha usato gli strumenti digitali forniti dal professore per risolvere il problema. Non si è posto il problema delle approssimazioni e dei calcoli elaborati da Geogebra.
	Lo studente è abituato alla prima strategia ed è convinto della sua ortodossia. Dunque riconosce questa strategia come l'unica strada che si possa percorrere; ritiene comunque che i risultati numerici cui conducono entrambe siano identici.	1f Lo studente preferisce la seconda strategia in quanto gli consente di lavorare sugli oggetti matematici realmente citati nel testo del problema (quadrati, rettangoli), al contrario di ciò che accade quando si utilizza il formalismo algebrico (occorre studiare una parabola).
		2a Ha usato la prima strategia. Ha svolto l'esercizio per via algebrica

Come per la prima sperimentazione anche in questo caso è possibile individuare un profilo particolarmente importante per la quantità di ragazzi che accomuna. Infatti la maggior parte degli studenti (il gruppo blu) ritiene corretto solo il primo esercizio specificandone il motivo: i libri di testo e gli insegnanti gli attribuiscono molta importanza. Dunque, se da una parte viene considerato corretto solo il primo metodo algebrico – analitico, dall’altra non si comprende pienamente a fondo perché. In più, i risultati che vengono forniti dal software appaiono plausibili, tant’è vero che il secondo esercizio viene risolto con l’ausilio del software. Quasi tutti gli studenti riescono a concludere che il triangolo che risolve il problema è un triangolo isoscele.

Questa convinzione avviene a dispetto del fatto che, nel secondo esercizio, le misure dei cateti visualizzati per il cateto1 e il cateto2 non possano mai effettivamente apparire uguali.

Sinossi delle analisi quantitative

La tabella che segue ha lo scopo di mettere in relazione i profili elaborati per ognuna delle due sperimentazioni e procedere quindi ad un ulteriore profilo sintetico per entrambe. I colori con cui sono stati distinti i profili per le sperimentazioni evidenziano comportamenti assimilabili.

Profilo di studente	**Prima sperimentazione**		**Seconda sperimentazione**	
	Rappresentazioni: esatta /approssimata	**Strategia: algebra / software**	**Rappresentazioni: esatta/approssimata**	**Strategia: algebra / software**
Algebrico (Rosso)	Usa solo la rappresentazione esatta	Conosce / usa solo l'algebra per risolvere i problemi	Usa solo la rappresentazione esatta	Non dimostra di preferire l'una all'altra; tuttavia, a suo parere, in ambito scolastico è d'obbligo usare l'algebra.
Indeciso (Verde)	Approssimata	Usa preferibilmente il software	Coincidenza tra i significati delle due rappresentazioni	L'algebra è da preferire
Consapevole (Blu)	Distingue correttamente le due rappresentazioni	Usa preferibilmente il software	Distingue correttamente le due rappresentazioni	Usa preferibilmente il software

Analisi qualitative

Alla luce di quanto osservato tramite l'analisi qualitativa dei dati è sembrato opportuno intervistare alcuni studenti tra quelli cui è stato somministrato il test. Sono stati scelti in particolare quegli studenti che hanno tentato, in maniera più o meno "corretta", di argomentare le proprie convinzioni. Le interviste venivano rilevate a coppie di studenti. L'insegnante era presente e ha avuto il ruolo di presentare il problema.

Prima intervista

Verrà riportata adesso la trascrizione di una intervista a due studenti frequentanti la stessa classe. Diamo loro i nomi di Giulia e Francesco. Si fa presente che Francesco ha studiato fino a quando aveva 13 anni in una scuola inglese. Giulia – che potrebbe essere inserita nella categoria dei "consapevoli" – ha espresso molto chiaramente, nei testi prodotti, la propria preferenza verso la strategia algebrica (dimostrando peraltro di sapere argomentare i vai passaggi); Francesco – tra gli "indecisi" – ha preferito invece utilizzare il software risolvendo tuttavia i problemi anche per via algebrica.

1. **Docente.** Vi ricordate cosa avete risposto? 2. **Giulia.** Io ho risposto che c'è il punto di intersezione, però non è possibile vederlo tramite il grafico che non è precisissimo. 3. **Francesco.** Io ho fatto prima il delta, ho	1. Si sta facendo riferimento al questionario scritto che hanno già svolto individualmente. 2. Giulia comincia a fare cenno ai problemi legati all'approssimazione insita nel

visto che veniva uguale a zero e quindi c'è un solo punto di intersezione. Poi ho usato excel, ho modificato i punti (l'intervallo tra un punto e l'altro) e mi è venuto... cioè vedevo il punto di intersezione... 4. **G.** ...grazie alla tabella, non nel grafico !... 5. **F.** … grazie alla tabella, certo... vabbè anche nel grafico... è che in questo momento non si vede perché gli intervalli sono larghi... proprio per come sono stati scelti i punti iniziali e finali. 6. **D.** Quindi se modifichi l'intervallo?... 7. **F.** Sì, modificando l'intervallo si vede molto chiaramente.	calcolatore. 3. F. userà diverse volte il verbo "vedere". Tutta l'azione di F. è finalizzata a mettersi nella situazione tale da impostare il software ricevuto in maniera tale da visualizzare nel modo migliore l'eventuale punto di intersezione.
8. **D.** Come modificheresti l'intervallo? 9. **F.** Allora... (guarda l'esercizio che ha svolto su un foglietto) il punto di intersezione è radice di 2... ho messo rad.q(2)... no! meno rad.q(2) e rad.q(2) … no... io l'avevo fatto... non mi ricordo più che numeri avevo messo... mi era venuto bene.	9. È come se lo studente, sapendo già qual è il punto di intersezione, volesse individuarlo con precisione. Per questo usa la funzione di excel *rad.q.* In ogni caso dimostra di conoscere bene il software.
10. **G.** Comunque dal grafico non si vede. 11. **F.** (spazientito e nervoso) SI VEDE, SI VEDE! 12. **G.** (anche lei si spazientisce) Sì ma non puoi vedere se c'è solo questo punto o se ce	11. Forse la "visione" così precisa di Francesco è dovuta al fatto che già conosce il risultato e quindi implicitamente sta affermando che non ci sarebbe bisogno di

n'è un altro più in là. 13. **F.** No, non può essercene un altro più in là, perché è una parabola. 14. **G.** Dal grafico non lo puoi vedere! 15. **F.** Invece lo puoi sapere... 16. **D.** Puoi rendere più evidente quello che tu vedi attraverso una scelta migliore dei punti iniziale e finale? Tu già sai che il punto di intersezione è radice di 2, cioè circa 1,4. Puoi usare un intervallo che contenga questo valore? Per esempio 1,2…. 17. **F.** L'intervallo tra i punti è 0,05, molto piccolo... per questo il grafico si confonde... vedi punti viola che si sovrappongono a quelli blu. Ci sono 4 punti viola che oscurano il punto blu. 18. **G.** E allora come fai a dire che il punto è unico? 19. **F.** Qua non è molto zoomato... non si vede bene perché i punti sono molto uniti... se sono separati... allora si vede che c'è un solo punto di intersezione. 20. **D.** Zooma ancora.	migliorare alcunché, visto che il risultato è già stato trovato. 12. G. sa di avere ragione, ma non riesce a prendere il punto di vita di F.; per lei il grafico è un oggetto finito ed approssimato nel quale si vede una intersezione confusa. Per F. invece il grafico è una rappresentazione di un oggetto ideale, la figura geometrica di una parabola che interseca una retta. Di tale figura si conosce già che presenta un solo punto di intersezione, dunque è questo che il grafico 'deve' rappresentare.
21. **G.** 1,3 - 1,5. l'intervallo è 0,01. 22. **G.** (soddisfatta) Non puoi dire che c'è solo un punto! 23. **F.** Vabbè... è che l'intervallo è molto	21. Sul grafico adesso tutti i punti appaiono sovrapposti

piccolo... se c'è un intervallo più grande allora si vede molto meglio.	
24. **D.** In che senso?	
25. **F.** Se prendiamo un punto qua, un punto qua e un punto qua... (comincia ad indicare punti sul monitor) 26. **Giulia** Si mette a ridere	25. - 26 F. comincia a indicare punti sul monitor ma questo provoca l'ilarità di Giulia che forse ha intuito cosa vuol dire F., ma vuole essere provocatoria
27. **D.** La tabella vi aiuta in qualche modo? Ci sono punti corrispondenti?	
28. **F.** e **G.** Uhmmmm... P12 e Q12.	
29. **D.** (legge) 1,4100 e 3,9762. Sembra che ci sia un punto in comune.	
30. **F.** Sì, sì. 31. **G.** Sì (con meno entusiasmo, molto pensierosa) 32. **D.** Questo vi basta a dire che il punto di punto di intersezione è unico.	30 - 31. Finalmente F. ritrova il punto che non riusciva inizialmente a far vedere. Giulia vede il punto. Probabilmente le sembra che il docente le stia dando torto e di fronte alla sua autorità non ribatte. Si capisce però che non è convinta.
33. **F.** Indica il punto successivo e il precedente ai punti appena indicati dal professore. 34. **D.** I punti successivi al dodicesimo sono diversi.	33 - 34. Per Francesco non serve spiegare nient'altro.
35. **G.** Però questo non può farmi capire che c'è solo un punto.	
36. **F.** Giulia, proprio perché l'intervallo è così piccolo (0,01).... cioè... i valori sono molto vicini tra di loro... quindi è molto	

preciso... quindi se c'è un punto esattamente uguale (si riferisce, indicandola, alla successione dei numeri dopo la virgola che coincide per P12 e Q12), allora è quello uguale. 37. **D.** Ti riferisci ai numeri dopo la virgola che sono specificate fino al decimillesimo. 38. **F.** Sì appunto. Poi l'intervallo è molto piccolo, quindi non credo che ci sono dei punti accanto che sono...	
39. **G.** Secondo me non è così. A parte il fatto che dal grafico non si può vedere perché è proprio sbagliato il modo in cui è disegnato... dovrebbero esserci dei punti molto più piccoli... e poi qua (nella tabella) non ne possiamo essere così sicuri... Tu ne sei sicuro perché prima hai fatto il calcolo e ti è venuto il delta uguale a zero. Se tu non l'avessi fatto secondo me non... 40. **F.** Vabbè io ho fatto il calcolo... ma poi sono andato a verificare 41. **D.** E se avessi fatto il contrario? Cioè prima l'avessi guardato con excel con lo zoom, come hai fatto prima... e avessi trovato questo P12 coincidente con il Q12...	39. Giulia "esplode": descrive il fatto che la tabella generata da excel è sbagliata. In che senso? Probabilmente si sta rendendo conto dei limiti imposti dal software.
42. **F.** Se faccio lo zoom e vedo questo punto e poi cambio lo zoom per vedere che si	42. F. continua a "vedere", il rapporto tra il grafico e la

tratta di una parabola... che poi risale... non si incontreranno più. 43. **G.** Secondo me il disegno non aiuta per niente. 44. **D.** (Rivolto a G)..: Ok, e la tabella? 45. **G.** Dovresti fare un intervallo ancora più piccolo... per esempio 1,4 e 1,5 46. **F.** Eccolo: P3 e Q3. 47. **G.** Uhm... ok... arrivato a questo punto... puoi dire... 48. **D.** È lo stesso punto che avevate trovato prima e che avevamo chiamato P12 e Q12? 49. **F. G.** Sì	soluzione algebrica al problema di intersezione deve essere di corrispondenza di compatibilità, di qui la fiducia che in ogni caso si possa migliorare la risoluzione e ottenere una corrispondenza sempre migliore. 44. Il docente riporta l'attenzione sulla tabella che finora era stata quasi ignorata.
50. **F.** Cambiando l'intervallo si vede che è sempre lo stesso punto... poi l'intervallo è così piccolo che le probabilità sono pochissime [sottointeso: che ci sia un ulteriore punto di intersezione] 51. **D.** un'ultima cosa: se aumentiamo le cifre decimali dopo la virgola nelle coordinate dei punti visualizzati?... Vi andrebbe di farlo? 52. **F.** Sì, ma il punto di intersezione è sempre lo stesso... è ovvio che ci sono tante cifre dopo la virgola, ma devi essere bravo... se aumentiamo le cifre dopo la virgola.. 53. **G.** (lo interrompe) Se aumentiamo le cifre dopo la virgola ci potrebbe essere la	50. F. adesso parla di probabilità. Verosimilmente, di fronte alla caparbietà di G., cambia la propria strategia argomentativa evocando la potenza di calcolo di cui dispone excel. 51. Il docente cerca di accontentare F. cambiando le impostazioni delle celle.

probabilità di trovare... 54. **F.** (la interrompe) secondo me è uguale! 55. Il **docente** cambia le impostazioni della celle rendendo visibili le prime 6 cifre dopo la virgole. I punti adesso non coincidono più. 56. **G.** Eh! (soddisfatta) 57. **F.** Vabbè, ma cambiamo i valori e poi si vede. Perché c'è il punto di intersezione 58. **D.** Attenzione! il problema è se il punto di intersezione è unico. 59. **G.** Può essere che la retta è secante e tu non lo vedi. 60. **F.** Ma così non vedi niente dal grafico... se lo cambiamo... 61. **G.** Appunto! nemmeno là lo vedi [si riferisce alla tabella] 62. **F.** Vabbè, siamo arrivati al milionesimo! Le probabilità sono minime che ci sia un altro punto... 63. **G.** Secondo me questo [il software] serve solo a farsi una idea, poi il calcolo lo devi fare comunque.	

L'aver svolto precedentemente il calcolo sembra aver dato a Francesco la certezza, che la lettura del grafico o della tabella non riescono a smontare, del fatto che l'intersezione sia in un solo punto. Francesco sembra non fare differenza tra il numero (soluzione) determinato con il procedimento algebrico e numero (soluzione) trovato tramite il software; Giulia invece tiene ben distinti i due procedimenti e di conseguenza il numero algebrico e il numero software non possono coincidere per lei. Questo è ciò che le dà la sicurezza di non poter stabilire tramite il grafico se l'intersezione è un solo punto o più di uno.

Le successive approssimazioni del numero visualizzate nella tabella sembrano tutte apparire a Francesco come modi diversi di scrivere lo stesso numero, ovvero il numero irrazionale che risolve il problema (vedi frasi 52-53-54). L'idea di approssimazione che sembra emergere dalle parole e dal comportamento di Francesco è quella di una successione di scritture diverse, ciascuna con una cifra decimale in più e per questo sempre più 'precise'. Tale successione rappresenta il numero che approssima, nel senso che ciascuna delle scritture lo rappresenta e in tal senso sono da considerasi tutte 'uguali' al numero e uguali tra loro. È come se ogni scrittura, anche se non le mostra esplicitamente, racchiudesse in sé tutte le cifre della rappresentazione decimale infinita del numero che approssima. Questa idea di approssimazione è del tutto compatibile con quanto si vede nella tabella, infatti è possibile scoprire, o meglio far apparire, nuove cifre che sono nascoste ma che 'esistono' agli occhi di Francesco. Questa interpretazione di approssimazione risulta peraltro compatibile anche con quello che si vede nel grafico, ovvero con l'interpretazione astratta, algebrica, che Francesco dà di tutto quello che vede sullo schermo.

D'altro canto, una simile interpretazione di approssimazione è però affatto diversa ed incompatibile con quella di Giulia, che considera ogni scrittura come rappresentante di un numero (dunque scritture diverse come rappresentanti di numeri diversi), e di conseguenza ogni numero come corrispondente di una possibile soluzione al problema di intersezione.

Seconda intervista

Questa intervista coinvolge due studenti della stessa classe. Uno dei due, che chiameremo Andrea, ha valutazioni eccellenti in tutte le materie, l'altro - lo chiameremo Filippo - è giudicato dagli insegnanti come "bravo".

Anche questi due studenti sono stati sottoposti alle domande del test. Andrea ha risposto alle domande del primo protocollo con grande precisione, l'altro ha saltato alcune risposte. Per quanto riguarda il primo problema ciascuno di loro aveva scritto:

ANDREA: *Guardando Excel si nota che la tabella ci dà un solo punto in comune. Dal grafico si potrebbe avere qualche dubbio, in quanto più punti sembrano coincidere. Da Excel si potrebbe intuire dal fatto che dopo il punto (1,0) la retta si allontana dalla parabola, anche se attorno al punto (1,0) non è chiaro dal grafico se ce ne sono altri.*

FILIPPO: *Utilizzando Excel, sia dal grafico che dalla tabella si può vedere che c'è un punto in comune tra parabola e retta, P(1,0). Modificando i valori delle variabili noteremo che il punto di intersezione sarà sempre lo stesso.*

Andrea potrebbe appartenere al profilo dei "consapevoli", mentre Filippo sarebbe annoverabile tra gli "indecisi".

1. **Andrea**. Ho modificato i numeri su fondo rosso e ho visto che ci sono due numeri... ehm... due punti molto simili... che si avvicinavano molto... però non erano proprio uguali uguali. Allora ho supposto che le due curve si intersecassero proprio in quel punto... magari con un errore di	1. Andrea coglie subito il nostro problema: il software offre valori approssimati. L' ipotesi che ci sia un solo punto d'intersezione e che la curva sia una parabola deriva ovviamente dal fatto

approssimazione da parte del programma, probabilmente. E allora ho detto che la parabola interseca la retta in un punto... che adesso non ricordo... più che altro vicino a quel punto.	che dell'esercizio si conoscono già le equazioni delle curve.
2. **Filippo**. Avevo cominciato lavorando con Excel, dato che lei (il prof.) aveva chiesto di usare excel. Non ho trovato punti che coincidevano, quindi ho pensato che... ho provato a cambiare il valore dell'intervallo, per vedere se magari con quello... ma non trovavo il punto... e allora l'ho fatto carta e penna e mi è venuto cioè sono riuscito a trovare il punto di intersezione.	2. Anche F. comincia con Excel, ma perché è 'diligente' e segue ciò che dice il professore. In effetti, poiché tramite il calcolatore non riesce a risolvere l'esercizio, si decide in favore dell'approccio cui è abituato: carta e penna.
3. **Docente**. L'intersezione era radice di due... se ricordo bene...	
4. **A.** Sì, 1,4...	4. A. si riferisce ad un valore approssimato che ha desunto dalla tabella.
5. **D.** Il problema chiedeva non solo di trovare il punto di intersezione - cosa che avete fatto in maniera diversa, comunque l'avete fatto - ma anche di riuscire a *far capire* che era unico.	
6. **F.** Io avevo pensato che potevamo utilizzare quei valori (su fondo rosso) per zoomare... quindi...	6. La domanda, che voleva essere neutrale, probabilmente poiché posta di fronte al computer, viene interpretata da F. come una richiesta implicita di usare il computer e dunque F pensa di ricorrere allo
7. **D.** Fallo...	

8. **F.** L'intervallo -2, 2.	zoom.
9. **A.** Qua si vede che la retta si avvicina fino ad un massimo valore e poi comincia ad allontanarsi dalla parabola. Quindi uno può supporre che ci sia un punto di intersezione solo, quindi che siano tangenti.	9. Andrea cerca di ragionare paragonando i valori della retta e quelli della parabola, ma parla sempre di ipotesi.
10. **D.** Riesci quindi a concludere che sono tangenti?	10 L'insistenza delle domande sembra quasi indurre gli allievi a pensare che si dovrebbe poter concludere a partire dai dati della tabella.
11. **A.** Da qua no... (dal grafico) perché non si capisce bene se sono uno o più... proprio dal grafico non si riesce a capire bene...	
12. **D.** E dalla tabella?...	
13. **F.** Il valore P6 e Q6 sono quelli che si avvicinavano di più...	13. Filippo sembra voler spiegare come il ragionamento sui valori nella tabella lo avesse portato a supporre che c'era un solo punto di intersezione. A. invece parla dell' allontanarsi dei punti tra di loro.
14. **D.** Non mi sembra...	
15. **A.** Io vedevo invece P18... e poi vedo che i punti incominciano ad allontanarsi... 6...5...4...6...	
16. **D.** Uhmm... quindi non ho capito sono tangenti o sono secanti?	15. Gli studenti stanno commentando punti e valori diversi, ma il ragionamento sembra essere: "trovo valori vicini e poi valori che si allontano…".
17. **A.** Sono tangenti perché i punti vanno allontanandosi...	
18. **D.** Quindi concludiamo che sono tangenti? silenzio. Nessuno vuol prendere la parola.	

...Dopo qualche secondo... 19. **F.** È questa la cosa difficile nell'usare excel. Quando io lo avevo svolto così, io lo vedevo che era difficile vedere che era proprio uguale il punto... visto che c'erano delle approssimazioni diventava complicato vedere qual'era il punto proprio tangente... per questo l'ho risolto con carta e penna.	19. Il punto di vista di Filippo è chiaro: il software non dà garanzie, per cui decide di affidarsi allo strumento algebrico. Occorre precisare che *carta e penna* significa attraverso l'algebra e non tramite disegno.
20. **D.** Usiamo lo zoom... 1,3 e 1,5... cosa vedete?... osservate che l'intervallo è 0,01... un centesimo! 21. **A.** Si vede quasi solo la retta che sovrappone la parabola. 22. **D.** Dalla tabella riuscite a ricavare informazioni?	20 - 21. L'insistenza del docente li porta a farsi convincere che la consegna riguarda il software.
23. **A.** Ah! ecco. dalla tabella... un punto uguale P12 e Q12... e vediamo che P11 e Q11 e P13 e Q13 sono differenti. (Silenzio) 24. **D.** Quindi?	23. È ancora probabile che stiano rispondendo alle sollecitazioni del professore.
25. **F.** Sì, possiamo dire che sono tangenti perché il punto uguale a tutti e due lo abbiamo... 26. **A.** L'intervallo è così piccolo che... 27. **F.** … Ci permette di vederlo. 28. **D.** Supponete che uno studente voglia risolvere questo esercizio in questo modo...	25. Gli interventi si accavallano l'uno sull'altro in maniera anche contraddittoria. Poiché gli studenti sanno che il punto di tangenza esiste, anche se i punti visualizzati sono in effetti differenti, quello che mostra lo schermo viene interpretato come

dicendovi che ha costruito un programmino in excel come questo e decidendo alcuni valori dell’intervallo abbia trovato quel punto di intersezione... che avete trovato voi... e dichiari che è il punto di tangenza. Se voi foste professori, cosa direste? Gli date ragione?	un unico punto.
29. **A.** È sempre una approssimazione al centesimo... se noi guardiamo P13 osserviamo che cambia solo l’ultima cifra... se noi aggiungessimo un’altra cifra dopo la virgola... cioè il professore potrebbe dire che non si può essere del tutto sicuri che il punto sia là.	
30. **D.** L’ipotetico studente allora scrive 1,4 e 1,42... l’intervallo è dell’ordine del millesimo... vi aumenta il numero di cifre dopo la virgola...	30. L’intervallo di cui si parla è quello del box rosso attraverso cui gli studenti possono interagire col software.
31. **A.** Effettivamente ora...	
32. **F.** Ci sono più numeri...	
33. **A.** …ci sono più numeri che sembrano uguali.	
34. **F.** P11, P12, P13... e P14 pure...	
35. **F.** … e P15	
Ridono	
36. **F.** Praticamente tutti.	
37. **D.** E allora l’ipotetico studente	

potrebbe raffinare ancora la visualizzazione del numero... sette cifre dopo la virgola... 38. **A.** Adesso il punto non c'è più... il punto P15... 39. **D.** Fino quasi al milionesimo sono uguali! Lo studente ipotetico afferma ora che con una misurazione così raffinata non ci sono più dubbi... ancora silenzio 40. **F.** ...Questo studente è davvero bravo...	
41. **A.** I punti dopo P15 si vanno allontanando... non credo però che si possa parlare di certezza. 42. **F.** La certezza non si può avere, perché dovremmo continuare all'infinito... però è stato bravo... 43. **A**. Sì è stato bravo perché ha saputo fare il programma e ci si è avvicinato moltissimo. 44. **F**. Alla fine si arriva alla stessa soluzione di chi l'ha fatto con carta e penna.	41. A. sta notando che prima del punto contrassegnato con il P15, le due curve sembrano avvicinarsi; dopo il P15 le due curve si allontanano. Questo potrebbe far pensare che non ci dovrebbero essere ulteriori punti di intersezione.

I due studenti erano già convinti che l'unica strategia per risolvere l'esercizio fosse quella che utilizzava l'algebra. Filippo appare impressionato dalla capacità di calcolo del software. Andrea rimane sempre estremamente cauto. Conosce le potenzialità dello strumento e si rende conto di quando poterle utilizzare. Andrea è sempre molto prudente e con saggezza conclude che l'ipotetico studente di cui parla il professore è molto vicino alla risposta "corretta", mentre Filippo afferma, alla fine di tutto il suo ragionamento, che i due strumenti sono equivalenti. Andrea sembra aver ben chiara la differenza tra la rappresentazione esatta del numero e quella approssimata e non confonde il numero rappresentato da ciascuna delle diverse scritture che vede sullo schermo con quello determinato per via algebrica e rappresentato dalla scrittura esatta $\sqrt{2}$. Filippo mostra qualche indecisione e conclude (44) che le soluzioni sono identiche, cioè il numero rappresentato nel software coincide con la soluzione irrazionale.

Terza intervista

Alessio ed Emanuela sono due studenti che frequentano entrambi la terza classe del liceo scientifico, ma appartengono a sezioni differenti. A differenza degli altri studenti, hanno affrontato l'intervista parlando del primo problema. Probabilmente la domanda del docente inizialmente è risultata ambigua, per cui hanno ritenuto opportuno trattare entrambi i fogli del file di Excel su cui avevano lavorato. Ambedue sono studenti "indecisi", visto che hanno entrambi provato a risolvere l'esercizio con il software, ma "per sicurezza" lo hanno anche svolto algebricamente.

1. **Docente.** Come avete risolto questi esercizi? 2. **Alessio.** Io l'ho risolta carta e penna; però contemporaneamente ho dato un'occhiata al grafico di Excel e si vedeva	2. Alessio ha quasi ignorato la richiesta di commentare i passaggi descritti nella fotocopia. Come Emanuela ha preferito cominciare

che c’era un punto di intersezione... tra 0 e 3...	dalla trattazione del software, tuttavia prima ha svolto l’esercizio algebricamente.
3. **Emanuela.** Io per prima cosa ho guardato il grafico, ma non sono riuscita a capire. Poi ho guardato la tabella e mi sono accorta che il punto di intersezione c’era. Se non avessi guardato le tabelle ma solo il grafico, non l’avrei capito... anzi avrei concluso che c’erano più punti di intersezione.	3. L’approccio al problema dei due studenti è inizialmente diverso. La studentessa prova a coordinare i differenti registri semiotici osservando alternativamente grafici e tabelle.
4. **A.** Dal grafico i punti sono tutti confusi. Dalla tabella invece si ricava che la retta e la parabola sono tangenti.	4. Anche Alessio ritiene inutile le informazioni fornite all’interno del grafico e osserva con più attenzione la tabella.
5. **E.** Sì!	
6. **D.** Avete provato a modificare i numeri su fondo rosso?	
7. **E.** Io ho provato ad avvicinare il grafico nei punti di intersezione... ma ricordo che era poco chiaro...	
8. **A.** Io ho cambiato il tipo di grafico. Invece dell’insieme di punti ho usato il grafico con la linea continua. E le cose erano molto più chiare! Così si vede che il punto di intersezione è unico perché prima le curve si avvicinano poi si allontanano.	8. Alessio, conoscendo bene il funzionamento di Excel e sfruttando il fatto che nessuno avesse specificato che non fosse possibile modificare la struttura del foglio di lavoro, cambia il tipo di grafico. Agisce quindi sulle limitazioni imposte inizialmente.
9. **E.** Per capire che il punto di intersezione è unico dovremmo avere in	

tabella tutti i possibili punti.	
10. **A.** Tutti i punti mi sembra eccessivo... magari solo i punti all’interno di un certo intervallo... 0,5 - 1,5	10. Modifica in tal modo i numeri su fondo rosso..
11. **E.:** …Così però sembra che ci siano più punti di intersezione...	11. Alessio rimane spiazzato dal suo stesso comportamento e non parla più.
12. **D.** E nel grafico cambia qualcosa?	12. Osservo che il passaggio dall’osservazione dal grafico all’osservazione della tabella è sempre stimolato.
13. **E.** Nella tabella il punto è sempre lo stesso. La tabella è sempre più chiara.	
14. **D.** passiamo al secondo esercizio.	
15. **A.** Cambiando di nuovo il grafico è successa una cosa strana. I punti di intersezione sembravano due... poi l’ho fatto con carta e penna e ho trovato che il punto di intersezione era radice di 2.	
16. **E.**: Sto cercando nella tabella il punto di intersezione, però non lo trovo.	16. Emanuela riprende il controllo della tastiera. Cosa sta cercando? Evidentemente non ha sentito e non ricorda che l’intersezione è radice di 2.
17. **A.** Zoomiamo l’immagine... nel grafico è terribile... non si capisce niente!	
18. **D.** Guardiamo allora la tabella?	18. Ancora una volta il passaggio è stimolato.
19. **A.** Dalla tabella sembra che non si toccano...	
20. **D:** Mi intrometto... proviamo a scrivere l’intervallo 1,3 - 1,5	
21. **E.** Ecco! Trovato! P12 e Q12 sono uguali!	
22. **A.** Sì, l’hai trovato ma avremmo	22. In pratica dice: “Se non ce lo

dovuto fare troppi tentativi … e poi non si capisce comunque che sono tangenti... Dal grafico sembra proprio che i punti di intersezione siano due... non si capisce che sono tangenti 23. **E.** Secondo me invece si capisce.	diceva il prof. non l'avremmo trovato mai!". È da notare che Alessio non riesce a considerare solo la tabella: mentre la guarda controlla il grafico.

Alessio, all'inizio di questa intervista, è convinto che sia possibile determinare il punto di intersezione attraverso l'uso esclusivo del software. Ha infatti determinato con successo il punto di intersezione della retta e della parabola proposte nel primo esercizio. Poiché infatti l'esercizio svolto con "carta e penna" algebricamente e con il calcolatore lo portano a determinare la stessa soluzione, crede di poter concludere che i due strumenti siano di fatto equivalenti. Ricordiamo che l'intersezione che si trova nel primo esercizio è individuata da coordinate intere. Nel secondo esercizio il punto di intersezione non è altrettanto facile da trovare rispetto al primo, perché è formato da coordinate irrazionali. Emanuela, avendo individuato una riga delle tabelle che indica gli stessi numeri (riga 21: *P12 e Q12 sono uguali!*) e di conseguenza l'eventuale punto di intersezione, considera risolto l'esercizio e non si preoccupa più di ciò che potrebbe succedere continuando a manipolare il software; Alessio appare invece scoraggiato dalla reale utilità dello strumento informatico. Forse la sicurezza e la velocità con cui Emanuela pensa di aver risolto il problema ci può far pensare che non abbia affatto chiaro il concetto di numero irrazionale (3, 21 e 23) inteso come numero che ha una rappresentazione decimale infinita non periodica.

Conclusioni

I profili elaborati attraverso lo CHIC hanno permesso di formulare una distinzione tra tipologie diverse di studenti. Intervistare a coppie studenti appartenenti alla stessa tipologia o anche diversa ha forse permesso di precisare quale fosse la caratteristica precipua di ognuno di essi, cioè quale fosse in effetti il discriminante tra la scelta di una strategia piuttosto che di un'altra.

Appare importante come la categoria degli studenti "consapevoli" abbia interpretato i numeri espressi nelle tabelle come approssimazioni di un numero che non poteva essere conosciuto per altra via se non quella algebrica.

Gli studenti "indecisi" non hanno mostrato di distinguere chiaramente tra la rappresentazione della soluzione ottenuta attraverso un procedimento algebrico e i numeri decimali sul monitor. Ciascun numero elaborato dal software – da intendersi come ascissa del punto di intersezione delle due curve – è stato interpretato proprio come quel numero determinato con l'algebra.

Seconda sperimentazione

Per quanto riguarda la seconda sperimentazione, poiché non è stato possibile intervistare in presenza gli studenti, si riporta di seguito una trascrizione di alcuni commenti riportati nei testi prodotti dagli studenti durante il percorso strutturato proposto.

L'analisi di tali commenti ha permesso di rafforzare l'analisi quantitativa svolta tramite lo CHIC e precisare meglio il profilo degli studenti 'algebrici'. Viene peraltro evidenziata l'origine didattica delle concezioni degli allievi che dichiarano, più o meno esplicitamente, di preferire una strategia piuttosto che un'altra in funzione della valutazione scolastica.

LUCIA *(ha svolto entrambi gli esercizi con metodo algebrico/analitico)* Solo la prima procedura è valida perché spiega algebricamente il procedimento. La seconda invece spiega il procedimento solo tramite un disegno e quindi non in modo scientifico. Un grafico in sé non giustifica un procedimento ma serve solo a rendere più immediato il procedimento algebrico. Quindi in un compito in classe (in cui dobbiamo giustificare il nostro ragionamento) non basta una rappresentazione grafica, ma serve una rappresentazione algebrica.

Lucia afferma che esiste un solo strumento valido utile alla risoluzione di un esercizio. Solo l'algebra e ciò che viene scritto in formule matematiche produce formulazioni matematiche corrette (la studentessa usa il termine "scientifico"). Lucia non attribuisce nessun valore al disegno. Non fa alcun riferimento al fatto che il disegno questa volta fosse dinamico e che il software elaborasse i dati del problema. Al più, a suo parere, dovendo risolvere un esercizio è possibile produrre un disegno perché sia funzionale alla scrittura di un testo algebrico, che – da solo – garantisce la correttezza dello svolgimento.

Il commento riguardante la valutazione della soluzione in un possibile compito in classe sottolinea il legame stretto tra questo profilo ed il contratto didattico standard relativo al problema della tangenza ad una curva.

Le osservazioni possibili "sul grafico" non hanno un valore "scientifico", come dice Lucia, ma a queste viene riconosciuto un valore euristico, come possiamo leggere nel protocollo che segue. Il rapporto tra una possibile esplorazione in un ambiente di geometria dinamica e le considerazioni intuitive che se ne possono ricavare sembra essere ben chiaro a Gabriele, che spiega, di seguito, come.

Gabriele: *(ha svolto entrambi gli esercizi con metodo algebrico/analitico)*
Per ottenere una conclusione valida e attendibile, inizialmente, mi sono servito di mezzi pratici come geogebra che tramite l'esperienza concreta mi permettono di visualizzare immediatamente l'andamento dei valori. Quindi mi sono servito di esempi concreti prendendo in considerazione i numeri (*ha creato una tabellina a due colonne per determinare alcuni punti della funzione A=altezza·base*). Soltanto in seguito mi sono posto il problema di generalizzare. Partire direttamente da una dimostrazione sarebbe stato più difficile, mentre l'utilizzo di un modello, un esempio concreto, permette una comprensione efficace. Preferisco quindi partire dall'esperienza concreta e successivamente applicare una regola di carattere generale.

Diversi sono stati i passaggi percorsi da Gabriele. Ha esplorato il file di Geogebra che era stato consegnato agendo sugli *slider* e, successivamente, ha sperimentato delle situazioni con carta e penna. Afferma di essere stato aiutato a svolgere l'esercizio dall'aver prima visto i dati elaborati secondo la metodologia proposta

nel protocollo. Tuttavia Gabriele non descrive come il software può averlo aiutato. Inoltre il secondo esercizio è stato sviluppato esclusivamente per via algebrica.
Dello stesso ordine di idee ci sembra il commento di Massimo, anche se il rapporto tra i due tipi di soluzione emerge piuttosto controverso.

Massimo: *(ha svolto entrambi gli esercizi con metodo algebrico/analitico)*
Secondo me è matematicamente corretto solo il primo processo perché il secondo è un metodo unicamente grafico. Entrambi conducono comunque ad una soluzione corretta ed accettabile perché entrambi si basano su una serie di misure. Mi sembra comunque più efficace la prima perché è matematicamente corretta e io utilizzerei la prima perché non potendo usare geogebra in una prova scolastica verrebbe sconveniente fare il grafico sul foglio.

Massimo dichiara che un metodo grafico non può essere valutato correttamente come quello grafico – analitico. Tuttavia, poiché le soluzioni a cui si arriva sono le stesse, si capisce che il giudizio è attribuito solo sulla base di convinzioni che esulano da quelle proprie dei concetti matematici. Massimo si riferisce ad *una serie di misure*, ma non si capisce come siano state prese ed elaborate. In più appare molto confuso il concetto di numero irrazionale, visto che non si riesce a distinguere tra l'approssimazione operata dal software e il risultato irrazionale che è stato ricavato con carta e penna.
La differenza tra esempio "concreto" e soluzione generale, si ritrova anche nel protocollo seguente, ma questa volta la distinzione non si ripercuote nella validazione delle strategie. Anche se un metodo è più "specifico" e l'altro più "generale", i due metodi "sono entrambi efficaci".

Maria Chiara: *(ha svolto entrambi gli esercizi con metodo algebrico/analitico)*
I due metodi di dimostrazione sono entrambi efficaci, anche se il primo è più specifico (*quello con Geogebra*) e quindi andrebbe ricalcolato ogni volta, mentre il secondo fornisce una più immediata risoluzione del problema nel generale. È stupefacente come la matematica possa fornire con un metodo tutto sommato semplice una soluzione ad un problema che può essere applicato ad altri ambiti al di fuori della matematica.

Maria Chiara ha svolto gli esercizi per via algebrica molto velocemente, mostrando grande padronanza nell'argomentare i passaggi. È consapevole che non è possibile riuscire a trovare un risultato valido "in generale" con il semplice uso di Geogebra. Infatti ogni risultato elaborato tramite Geogebra dipende dal particolare valore scelto per lo *slider*, ecco perché viene ritenuto "specifico".
In maniera totalmente diversa vengono affrontati i problemi da Francesco.

FRANCESCO: (*non ha svolto gli esercizi per via algebrica ma, sulla base delle strategie presentate all'interno del percorso ha presentato soltanto le seguenti considerazioni*)

Congettura

L'area, tra i rettangoli di stesso perimetro, assume il valore maggiore nel momento in cui ci avviciniamo ad un quadrato poiché non c'è scarto tra la misura dei lati. Essendo lo scarto nullo l'area sarà maggiore.

Dimostrazione

Partendo dal valore x (*max*) = 10 ed il valore minimo di $y = 0$, l'area = 0.
Procedendo a ritroso, ovvero $(x, y) = (9, 1) - (8, 2) - (7, 3)$, ecc. notiamo che l'area aumenta rispettivamente al cambiare delle coppie di punti. Si ottiene infatti:
$9 \cdot 1 = 9$

8·2 = 16

7·3 = 21

Proseguendo con questo calcolo si arriverà al punto (5,5) che presenta una superficie di 25. Questo è il valore maggiore che è possibile ottenere e la sua figura equivale ad un quadrato.

Proseguendo verso l'origine, dato che siamo partiti dal valore massimo otteniamo dei valori decrescenti sino al punto 0·0=0. L'area massima è quindi 25.

In generale è possibile dedurre che i lati di un rettangolo, per avere l'area massima possibile, mantenendo lo stesso perimetro, devono essere uguali.

Con lo stesso metodo deduco che i cateti devono essere uguali.

Lascia un po' di spazio

La dimostrazione matematica (*si riferisce a quella esposta dal professore attraverso il video nella prima strategia*) è stata chiara e convincente, in relazione a ciò che avevo scritto nella mia dimostrazione dove spiegavo che si ottenevano stessi valori procedendo a ritroso. L'unica cosa che mancava era la generalizzazione. Infatti è molto utile, in tutte le dimostrazioni trasportare i nostri dati in un grafico e raffigurarli tramite una curva. Ecco infatti che la parabola esemplifica tutto ciò che abbiamo analizzato poiché da essa è possibile estrapolare le formule universali.

Francesco, dopo avere attentamente ascoltato ciò che viene presentato attraverso il percorso esposto dal docente in classe, decide di non svolgere gli esercizi algebricamente, ma di presentare invece delle considerazioni.

Nel momento in cui deve scegliere la prima o la seconda strategia per il primo esercizio, decide di compilare sul foglio una tabella all'interno della quale inserisce solo numeri interi. Dall’analisi di questi dati osserva che i risultati dei prodotti, che corrispondono quindi alle aree dei rettangoli, prima del valore 5 aumentano, dopo diminuiscono. Deduce che il numero intero 5 corrisponde alla misura del lato del rettangolo di area massima.

Quindi, passando al secondo esercizio, procede con lo stesso metodo per determinare le misure dei due cateti. Questa volta, visto che la tabella è di difficile elaborazione dato che non è sufficiente usare esclusivamente i numeri interi, utilizza la finestra “algebra” del file Geogebra. Assegna ai cateti dei valori prima interi, poi approssimati alla seconda cifra dopo la virgola (vincolo imposto da Geogebra). Si accorge così che, affinché la condizione richiesta sia soddisfatta, i cateti devono avere la stessa misura. Ricordiamo che nel file di Geogebra che viene consegnato agli studenti al massimo valore del rapporto richiesto corrispondono due valori diversi per ogni cateto; in ogni caso, a meno di un centesimo, i cateti non sono uguali.

Dunque Francesco riesce a mutuare il ragionamento valido per il primo esercizio (in cui vengono usati solo numeri interi) solo ipotizzando che i valori sono approssimazioni più o meno efficaci di un numero che certamente esiste ed è sicuramente lo stesso. Non importa in effetti il centesimo di scarto che di fatto distingue le misure dei due cateti, perché entrambi rappresentano lo stesso numero.

Analoghe considerazioni valgono anche per Lorenzo.

LORENZO *(non ha svolto gli esercizi per via algebrica e ha presentato le seguenti considerazioni)* Ho considerato tutti i rettangoli con perimetro uguale a 20 *cm* e ho notato che minore è la differenza tra base e altezza più l’area aumenta e, viceversa, maggiore è la differenza tra la base e l’altezza minore sarà l’area. Per quanto riguarda l’altro esercizio, il rapporto dei lati è massimo quando i cateti sono uguali

Lascia un po' di spazio

La dimostrazione con la seconda strategia è sicuramente più semplice, ma non permette di generalizzare per tutti i rettangoli. Ma la prima è anche più complicata e non penso ci sarei potuto arrivare da solo. Ma comunque, la mia dimostrazione, pur essendo molto elementare, mi ha permesso di capire in generale come porsi per trovare una legge a partire da una osservazione.

Lorenzo ha consapevolmente scelto di operare solo con triangoli che hanno perimetro uguale a 20. Per risolvere l'esercizio gli è più congeniale l'uso di Geogebra anche perché, afferma, non sarebbe riuscito per via algebrica.

Lorenzo avrebbe saputo svolgere per via analitica il primo esercizio, ma non il secondo. Il secondo esercizio viene tuttavia concluso, così come ha fatto Francesco, osservando i dati prodotti da Geogebra e visibili nella sua finestra "algebra". Lo studente parla di dimostrazione, se pur elementare, che gli ha consentito di trovare una legge, ma lo strumento informatico gli è essenzialmente servito per operare i calcoli velocemente.

Il protocollo seguente riporta il commento di uno studente che esprime in modo chiaro il contributo che viene dall'osservazione delle immagini prodotte da Geogebra, rispetto alla strategia analitica proposta nel testo e che lui forse non sarebbe stato in grado di impiegare.

GIUSEPPE *(non ha svolto gli esercizi ma ha presentato le seguenti considerazioni)*

Ho attentamente osservato la variazione che subisce il rettangolo preso in considerazione, ho notato il suo cambiamento di area in base all'aumento e alla diminuzione dei lati base e altezza. Il momento in cui raggiunge la sua massima area avviene nel momento in cui vi è una identità di valore dei lati, poiché riceviamo il valore massimo dal prodotto di b e h.

Lascia un po' di spazio

Indubbiamente il processo analitico utilizzato attraverso la generalizzazione dell'equazione della parabola è molto più efficace e convincente rispetto alla sola osservazione dell'oggetto, sebbene possa implicare un procedimento logico non abbastanza semplice per un'immediata elaborazione.

Di tenore completamente diverso appare il protocollo seguente, nel quale troviamo evidenza delle caratteristiche relative al profilo dei "consapevoli" dove l'uso del software e le operazioni possibili nel suo contesto assumono gran valore per l'allievo, che arriva a preferirle alle strategie dell'algebra che comunque ha dimostrato di sapere padroneggiare.

RACHELE

Prima fase

La prima cosa che ho fatto onestamente è stata prendere un foglio e disegnare diversi rettangoli (compreso il quadrato) con lo stesso perimetro e ho potuto constatare che in effetti è il quadrato ad avere l'area maggiore, poiché . Infatti se pongo il perimetro uguale a 12, l'area del quadrato ovvero è maggiore delle altre combinazioni ($5 \cdot 1$; $1 \cdot 5$; $4 \cdot 2$; $2 \cdot 4$; etc.).

Seconda fase

Non avrei utilizzato il metodo algebrico (non ho pensato un possibile collegamento con la parabola). Più facile invece era il metodo grafico, poiché è lo stesso ragionamento che ho fatto applicato a Geogebra, che è più preciso naturalmente.

Terza fase

Per sapere quale triangolo rettangolo ha l’area maggiore rispetto gli altri con lo stesso perimetro ho aperto geogebra, ho disegnato una circonferenza con centro all’origine, ho trovato le intersezioni con gli assi, e ho disegnato un triangolo rettangolo nella semicirconferenze superiore con l’ipotenusa che coincide con il diametro, e l’angolo opposto di 90°. Facendo scorrere il vertice opposto all’ipotenusa sulla circonferenza, ho potuto constatare che il triangolo rettangolo con l’area maggiore è il triangolo rettangolo isoscele.

Quarta fase

Ritengo più che validi entrambi i processi argomentativi utilizzati per risolvere il primo problema, poiché entrambi raggiungono lo scopo finale, ovvero dimostrare che in effetti la soluzione è una sola, cioè l’area del quadrato.

Trovo che la strategia più efficace ed immediata sia la seconda, perché risulta più semplice in quanto si vede concretamente la variazione dell’area, anziché la prima dove è più facile sbagliare (i calcoli sono un esempio).

Rachele descrive dettagliatamente – scandendo in fasi – il suo ragionamento. Rispetto agli altri studenti Rachele ha voluto ricreare personalmente i file di geogebra già forniti. Anche se parte dalla affermazione che “entrambi i processi argomentativi” siano validi, l’allieva dichiara di preferire chiaramente la seconda strategia, fondata sull'uso del software, proprio in virtù della sua concretezza, ma anche perché, in questo caso, i calcoli sono delegati alla macchina. Quindi, per Rachele, il software diventa garante dei risultati numerici ottenuti. In altre parole, Rachele ripone maggiore fiducia nell'uso del software rispetto all'uso di strategie algebriche, in particolare rispetto ai passaggi algebrici eventualmente prodotti con carta e penna vista la facilità di errore che si ha in questo caso.

Una risoluzione di un problema da esame di stato

La seconda sperimentazione prevedeva una parte ulteriore, ma siccome solo in pochi hanno risposto non è stato ritenuto significativo riportarne i risultati. Di questa parte della sperimentazione abbiamo deciso però di riportare i risultati emersi da una singola intervista. L'esempio che riportiamo ci è sembrato interessante perché fornisce un ulteriore esempio delle possibili concezioni che uno studente può avere riguardo alle rappresentazioni esatte e approssimate, in base al contesto un cui si sta lavorando e dunque al numero rappresentato: in algebra o nel software.

Il problema proposto faceva parte del secondo tema proposto agli studenti che hanno affrontato la sessione di ordinamento dell'Esame di Stato del liceo scientifico nel 2009.

Il testo è riportato di seguito.

PROBLEMA 2

Nel piano riferito a coordinate cartesiane, ortogonali e monometriche, si tracci il grafico G_f della funzione $f(x) = \log x$ (*logaritmo naturale*)

1. Sia A il punto d'intersezione con l'asse y della tangente a G_f in un suo punto P. Sia B il punto d'intersezione con l'asse y della parallela per P all'asse x. Si dimostri che, qualsiasi sia P, il segmento AB ha lunghezza costante. Vale la stessa proprietà per il grafico G_g della funzione $g(x) = \log_a x$ con a reale positivo diverso da 1?

Agli studenti intervistati è stato richiesto:

1. una risoluzione prettamente algebrica – analitica delproblema.
2. una risoluzione in cui l'uso di Geogebra fosse predominante: in altre parole si è chiesto di tentare, se possibile, di concludere che il segmento AB mantiene costante la propria misura indipendentemente dalla scelta di P sulla curva.

L'analisi delle interviste realizzate mostra che quasi tutti gli studenti sono riusciti a risolvere il problema per via algebrica, ma che nessuno, sebbene stimolato dall'intervistatore, ha saputo affrontare autonomamente il secondo punto benchè avessero già utilizzato Geogebra nella loro pratisca scolastica quotidiana.

È importante ricordare che, per quanto riguarda questo secondo punto, è stato inibito l'uso del comando *tangenti* (nella figura 25) che, immediatamente, permetterebbe di tracciare la tangente alla curva.

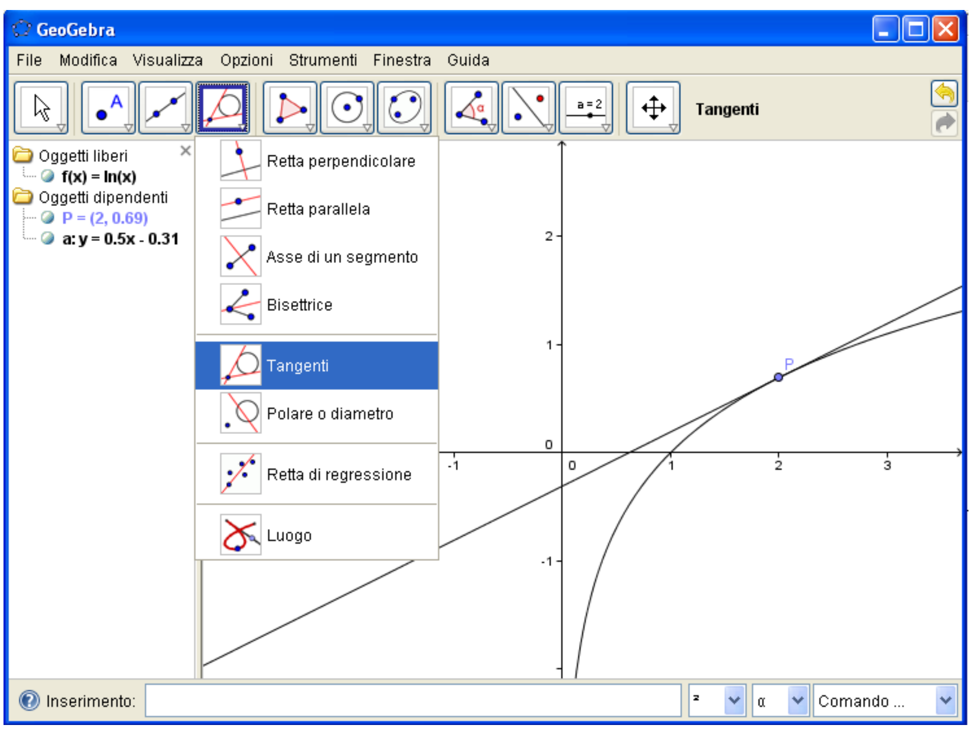


Figura 25

Soltanto una studentessa di liceo scientifico ha saputo affrontare il secondo punto del test. È questa l'intervista che, di seguito, viene riportata. Il docente e la studentessa hanno a disposizione un computer con installato Geogebra. Il software è già stato aperto ed il professore ha provveduto a disegnare la curva logaritmica.

1. **Docente**. Come puoi scrivere il generico punto P?	
2. **Raffaella**. Bè: x e logx… Scrivo (t, logt) scrivo t come un parametro…	**2**. Sta scrivendo sulla carta.
3. **D**. Dato che hai individuato le coordinate del punto abbiamo informazioni in più per quel che riguarda le due rette?	3. Il prof. sta osservando adesso lo schermo.
4. **R**. Questa è la retta y=logt e quindi abbiamo trovato il punto di intersezione tra la parallela e l'asse delle y (0, logt)	**4**. Raffaella sta guardando lo schermo e scrive su carta.
5. **D**. perfetto!	
6. **R**. A questo punto possiamo fare una cosa bellissima… mi serve geogebra… ecco questo è un fascio di rette $y\text{-}y_0=m(x\text{-}x_0)$. Adesso sostituisco al posto di x_0 t e al posto di y_0 logt. Uhm… cosa è m?	**6**. La "cosa bellissima" cui si riferisce Raffaella è l'utilizzo della nota formula della retta pasante per un punto, noto il coefficiente angolare. Prima di scrivere su carta però sente la necessità di muovere il punto P e poi scrive sul suo foglio : $y–\log t = mx–mt$. Infine si rivolge direttamente al docente con aria pensierosa.
7. **D**. Mi stai chiedendo che cosa è il coefficiente angolare? Pensa al suo significato…	

8. **R**. Derivata! Devo fare la derivata della funzione passante applicata al punto. Un attimo… intanto mi scrivo tutto… y=mx-mt+logt. Noi dobbiamo fare la derivata della funzione per quel punto quindi y’= D(logt) = 1/t; quindi abbiamo l’equazione anche della tangente e di conseguenza mettiamo tutto a sistema e ci troviamo l’intersezione…	**8**. Raffaella esplode in una esclamazione e interrompe ciò che il docente stava per dire. Sta guardando il monitor ma, credo, più che altro pensa tra sé e sé. Sta scrivendo tutto sul suo foglio e alla fine riesce a dimostrare quanto richiesto.
9. **D**. Benissimo. Adesso io ti chiedo di fare lo stesso disegno con geogebra. Però ti inibisco l’uso del tasto tangente. Io ti imposto un nuovo foglio, scrivo l’equazione y=logx su geogebra.	
10. **R**. [ci pensa su qualche minuto e sta in silenzio a muovere un punto sulla curva logaritmica]	**10**. Trascorrono diversi minuti durante i quali la ragazza non riesce a procedere con il ragionamento.
11. **D**. pensa a quello che hai già fatto. Ti consiglio di riguardare con attenzione il processo con cui hai già risolto il problema e di cercare di sfruttarlo.	**12**. Il professore cerca di aiutarla.
12. **D**. prova a considerare ciò da cui hai iniziato: hai scritto il generico	

punto della curva utilizzando la “*t*” 13. **R**. Questo punto P sulla curva noi lo conosciamo. Infatti… se intersechiamo la retta tangente con… 14. **R**. aspetta un attimo! Umh… noi possiamo mettere al posto di *t* dei valori degli *slider* con dei valori che variano; *t* infatti lo consideriamo un parametro… quindi dovrei rifare tutto daccapo… 15. **D**. Coraggio! 16. **R**. Dunque bisogna scegliere un minimo ed un massimo… Di solito inserisco i valori -10 e 10… Quindi in questo modo individuo un punto della funzione logaritmica che abbia ascissa lo slider… [silenzio] un attimo… così non posso farlo…Devo correggere una cosa… lo slider da un minimo di 0 – anche se lo 0 andrebbe escluso – ad un massimo… mettiamo … di 20. Perché non ha senso mettere un numero negativo.	**13**. Ha perso il filo del discorso. Fraintende il fatto che svolgendo l’esercizio ha scritto le coordinate del punto in funzione di un parametro e ritiene che il punto P sia un ben determinato punto fisso sul piano. **14**. Improvvisamente l’illuminazione. Dopo aver guardato di nuovo il quaderno che aveva utilizzato. Probabilmente concentrandosi, come aveva suggerito il docente, sulla scrittura del punto P mediante il parametro le è venuto in mente di utilizzare lo *slider.* **16**. È interessante notare che, benché poco prima nel contesto carta e penna abbia correttamente precisato il dominio della funzione come l’insieme dei valori t>0, Raffaella si trovi a riscoprire questa limitazione nella definizione del range per lo slider che quindi deve ammettere valori positivi.
17. **R**. Allora adesso scrivo il punto che abbia ascissa *t* dello *slider* e	17. Ancora, si può notare che anche questa volta Raffaella non ripete i passaggi

ordinata log*x*… vediamo… no! 18.**R**. logt... Che stupida! [riprende carta e penna] allora… y=1/t (x-t)+logt… Ce l'ho fatta!	eseguiti nell'esperienza *carta e penna*. Sembra che l'allieva si trovi a riscoprire il significato delle operazioni compiute poco prima. Ogni volta che risolve – riuscendo a interagire con il sofware – una parte di problema appare sorpresa. 18. R. cosidera completamente risolto l'esercizio: trascina il punto lungo tutta la curva e fa notare che il segmento che si viene ad individuare sull'asse delle *y* – la cui misura è richiesta dal problema – rimane costante sulla finestra algebra del file.

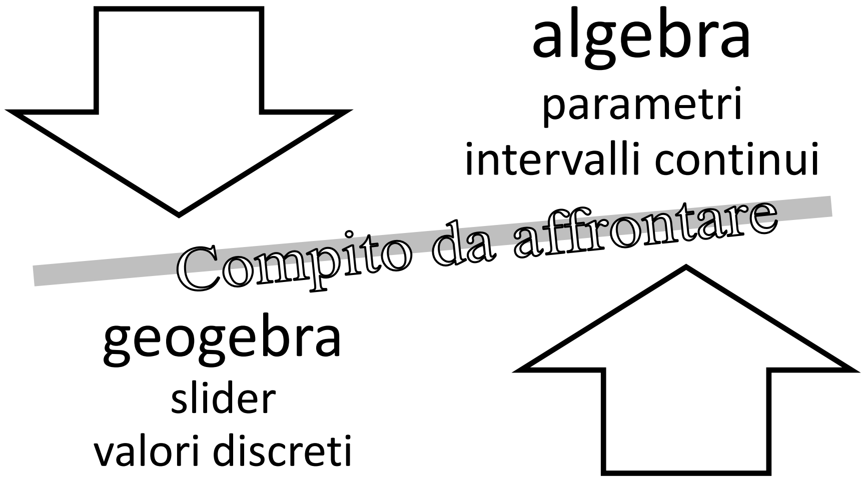
Durante la prima parte dell'intervista, la studentessa ha risolto il problema dell'Esame di Stato usando gli strumenti dell'analisi appresi durante le ore scolastiche e dal libro di testo. Raffaella ha interpretato il generico punto P come il generico punto appartenente al luogo di punti appartenente alla curva logaritmica.

Implicitamente, nella scrittura delle coordinate di P in funzione di un parametro *t*, c'è l'idea della continuità dei numeri reali. Raffaella non specifica cosa si debba intendere per *t*. Non precisa che questo parametro debba appartenere ai numeri reali, da un parte perché implicito per la funzione logaritmica, d'altra parte perché quasi tutto ciò che si studia durante il quinto anno del liceo ha a che fare esclusivamente con i numeri reali.

Quando il parametro *t* deve essere interpretato da uno slider, emerge il problema del dominio di variazione considerato. In questo caso la corrispondenza non può non tener conto del fatto che l'insieme di definizione dello slider è discreto e finito, in quanto implementazione di un parametro in un software.

Raffaella commette un errore che lavorando carta e penna non aveva compiuto. Proprio perché Geogebra non può lavorare con valori continui ma con valori discreti è necessario impostare un valore massimo, un valore minimo da attribuire al parametro, nonché l'incremento. Queste richieste non hanno assolutamente nulla a che vedere con il parametro reale introdotto nella prima parte dell'intervista. Il parametro *t*, introdotto durante la risoluzione analitica, e lo stesso parametro, introdotto durante la risoluzione con Geogebra, le appaiono, di primo acchitto, due oggetti assolutamente diversi. Dunque Raffaella sbaglia imponendo come valore minimo di *t* il valore -10. In effetti l'inserimento dei numeri 10 e -10 come estremi dell'intervallo è quello che viene dato solitamente per default a Geogebra quando occorre impostare lo slider. Sembra che Raffaella inserisca velocemente due numeri, i primi che le vengono in mente, senza effettivamente riflettere che, in quel momento, sta impostando un campo di variazione che deve corrispondere necessariamente al campo di esistenza della funzione.

L'errore, a mio giudizio, è molto profondo perché Raffaella non riesce a interpretare la differenza tra il parametro continuo e limitato – necessario per la definizione di uno slider, attraverso le scelte dei valori da immettere nei diversi campi proposti del parametro – e la sua consistenza con la strategia sviluppata con carta e penna rispetto al parametro introdotto con Geogebra con lo strumento slider.



Si potrebbe forse dire che le convenzioni cui la studentessa è stata abituata attraverso l'assiduità al metodo algebrico sono state trasferite al contesto software; in questo modo la non distinzione tra le due situazioni ha condotto la studentessa a giungere in entrambi i casi alla stessa soluzione corretta ma – probabilmente proprio per questo motivo – non ha operato alcuna riflessione su i vincoli del software.

In effetti dopo aver superato questo scoglio Raffaella recupera pienamente il controllo dell'esercizio e riesce a comunicare al software l'equazione della tangente dipendente dal parametro scelto *t*. Nessun altro studente era riuscito a scrivere:

– t.

Modificando il valore da assegnare alla *t* tramite lo slider è possibile visualizzare sul monitor dello schermo quelle rette tangenti alla curva logaritmica che passano per P (*t*, log *t*). Tuttavia Raffaella non prende minimamente in considerazione che il testo chiedeva di dimostrare che la proprietà fosse valida per ogni P scelto sulla curva.

La studentessa ha, di fatto, visualizzato, un numero finito di situazioni. Inoltre non ha mai tenuto conto di ciò che il software calcola veramente. Il valore della misura che appare nella finestra di Geogebra rimane sempre uguale ad 1. Nell'intervista non si considera minimamente l'eventualità che quel numero possa essere il frutto di approssimazioni.

In conclusione Raffaella ha dimostrato di gestire molto bene sia la strategia veicolata dal metodo analitico sia quella legata al software. Tuttavia l'aver gestito entrambe le strategie avrebbe potuto essere un'occasione per precisare la natura della continuità dei numeri reali la cui importanza, probabilmente, non le risultava ancora evidente.

Conclusioni

Per concludere qualche osservazione generale. Tra le varie interviste svolte e i protocolli esaminati forse è possibile individuare un atteggiamento comune a tutti gli studenti: di fatto, la situazione e le richieste specifiche di ciascun test sembrano avere suscitato risposte piuttosto uniformi. In generale, gli allievi hanno risposto con una certa naturalezza, sfruttando le potenzialità offerte dal software di fornire una rappresentazione efficace dei particolari oggetti matematici in gioco. Sembra dunque che le situazioni problematiche proposte non presentino intrinseca la potenzialità di far emergere alcun conflitto tra un procedimento meramente algebrico - analitico e uno in cui sia stato fatto uso di software. In modo abbastanza naturale, e soprattutto non problematico, sono state utilizzate le diverse modalità rappresentative offerte dal software proposto.

Ciò sembra essere del tutto consistente con il comportamento tenuto di norma quando in matematica si usa un qualsiasi sistema di rappresentazione. Questo è quanto facciamo normalmente, ad esempio, quando usiamo un tratto di penna sulla carta per rappresentare una retta: anche se tale tratto non è, in effetti, una retta, tuttavia l'uso di tale rappresentazione ci permette di supportare i nostri ragionamenti e dare alla fine una risposta. È fondamentale, però, tener conto del fatto che ogni rappresentazione concreta – per propria natura discreta e finita – funziona a fini euristici proprio in virtù del fatto che il solutore è in grado di ignorare i limiti di tale rappresentazione e sfruttare al massimo le potenzialità che offre. Se questo controllo, sui limiti e i vincoli di ogni rappresentazione, è certamente assicurato nel caso di esperti, non altrettanto si può dire nel caso di studenti. La consapevolezza di questa possibile diversità non sembra però essere presa nella dovuta considerazione nella pratica scolastica, dove di solito non si dedica spazio a tale problema . In questo senso ci sembra che il comportamento di tutti gli allievi del nostro studio risulti perfettamente coerente con la pratica scolastica e l'esperienza specifica che ciascuno ha maturato lavorando nei diversi contesti, in modo acritico.

La rappresentazione del numero, come abbiamo visto, dipende molto dal contesto nel quale viene sviluppata. Elaborare, attraverso procedimenti matematici, dati sperimentali o anche, più semplicemente, operare delle congetture aiutandosi con software didattici può ingenerare misconcetti non facilmente prevedibili.

L'interpretazione di un risultato, fornito dal computer dipende anche dalla consapevolezza di tale rapporto che è stata raggiunta dagli allievi e, ancora, da quanto tale consapevolezza è stata in qualche modo sollecitata attraverso situazioni problematiche e oggetto esplicito di discussione in classe.

Come abbiamo cercato di chiarire nella nostra ricerca, la distinzione tra la concezione di numero in algebra e la concezione di numero che emerge dalle attività svolte nel software, non viene di fatto riconosciuta dagli studenti intervistati. Le successioni di numeri con cui i ragazzi hanno dovuto lavorare venivano interpretate come tante possibili rappresentazioni del numero che avrebbe potuto risolvere l'esercizio per via algebrica.

È stato inoltre evidenziato come alcuni studenti abbiano fatte proprie strategie diverse per la risoluzione di esercizi perché sono state considerate equivalenti le soluzioni che venivano prodotte attraverso di esse.

Il valore di validità dato alle diverse strategie, algebriche o euristiche fondate sull'uso del software, dipende molto dal sistema di valori che è stato condiviso in classe. In particolare, l'importanza attribuita alle procedure sviluppate dal software e i conseguenti risultati da esso forniti dipendono da quanto è stato reso esplicito il rapporto tra ciò che avviene nel contesto di un software come GeoGebra o Excel e il contesto algebrico, che risulta agli studenti più familiare. Questo invita a considerare l'importanza di trattare in modo esplicito ed approfondito il tema della relazione tra sistemi di rappresentazione diversi ed in particolare la relazione tra sistemi di rappresentazioni usati in un software.

In altre parole, la ricerca svolta ha come implicazione didattica l’urgenza di elaborare strategie didattiche, ed in particolare percorsi specifici di approfondimento, per affrontare il problema del rapporto tra rappresentazioni e concezioni del numero nei diversi contesti. I risultati presentati in questa tesi ci auguriamo forniscano elementi utili a questo scopo.

Bibliografia

- Acerbi, F. (2007), Una scuola matematica alessandrina?, La matematica. I luoghi e i tempi (a cura di C. Bartocci e P. Odifreddi), Einaudi, Torino, pp. 65-90.
- Artigue, M. (1998), Teacher training as a key issue for the integration of computer technologies. In D. Tinsley and D. C. Johnson (Eds), Information and Communications Technologies in School Mathematics, Proceedings of the IFIP WG 3.1 Working Conference, pp. 121–129. Villard de Lans, Chapman & Hall.
- Balacheff, N. (1983), Artificial Intelligence and Real Teaching. In C. Keitel & K. Ruthven (Eds.), Learning from Computers: Mathematics Education and Technology, pp. 131-158. Berlin: Springer-Verlag.
- Balacheff, N. (1988), 'Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics', in D. Pimm (ed.), Mathematics, Teachers and Children, Hodder & Stoughton, London, pp. 216–235.
- Barozzi, G. (1995), Il ruolo dell'informatica nella didattica della Matematica. XV Congresso dell'UMI, Padova, 11-16 settembre.
- Bartolini Bussi, M. G. & Boni, M. (2003), Instruments for Semiotic Mediation in Primary School Classrooms, For the Learning of Mathematics, Vol. 23, No. 2 (Jul., 2003), pp. 15-22.
- Bartolini Bussi, M. G. & Mariotti, M. A., (2009), Madiazione semiotica nella didattica della matematica: artefatti e segni nella tradizione di Vygotskij. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, Vol. 32 A-B n.3.
- Bottino, R., & Chiappini, G. (1997), La natura della mediazione offerta dai sistemi basati su micromondi all'apprendimento della matematica Parte I: Stato dell'arte e quadro teorico di riferimento. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, Vol. 20A-B, pp. 772-791.

- Brousseau, G, (1980), L’échec et le contrat. Reserches ed diactique des mathématiques, 41, pp. 177-182.
- Chevallard, Y. (1991), Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l’activité mathématique. Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l’Informatique de Grenoble. LSD2-IMAG, Université Joseph Fourier, Grenoble.
- D’Amore, B. (2001), Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica. La matematica e la sua didattica, 2, pp. 150-173.
- De Villiers, M. (1990), The role and function of proofs in mathematics, Pythagoras, 24, pp. 17-24.
- Duval, R. (1995), Quel cognitive reteir en didactique des mathematiques?, Actes de l’Ecole d’été, (traduzione italiana: La matematica e la sua didattica, 3, 1996, pp. 250-269).
- Fishbain, E. (1998), Conoscenza intuitiva e conoscenza logica nell'attività matematica. La matematica e la sua didattica, 4, pp. 365-401.
- Guin, D. & Trouche, L. (1998), The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 3(3), pp. 195–227.
- Gras, R (1996), L’implication statistique (Nouvelle méthode exploratoire de données), R.D.M., La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Gras, R. (2000). Les fondements de l’analyse implicative statistique, Quaderni di Ricerca in Didattica, Palermo.
- Hanna, G. (2000), Proof, explanation and exploration: An overview. Educational studies in Mathematics, 44(1), pp. 5–23. Springer.
- Härting, K. (1993), Il dimostrare e le dimostrazioni nell’insegnamento della matematica. L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 10, pp. 888-906.

- Hoyles C. (1993), Microworlds/Schoolworlds: the transformation of an innovation, in Keitel C. & Ruthven K. (eds.), Learning from Computers: Mathematics Education and Technology, Nato Asi Series F, Vol. 121, Berlin: Springer Verlag, pp. 1-17.
- Hoyles, C., Noss, R. (1996), Windows on Mathematical Meanings, Kluwer Academic Press.
- Kissane, B. (1995), Graphics calculators in upper secondary courses. *Barry Kissane's Home Page*. http://wwwstaff.murdoch.edu.au/~kissane/SEApaper.htm
- Laborde J.M., Strasser R., (1990), Cabri-Géomètre: a microworld of geometry for guided discovery learning, ZDM, 90/5, pp. 171-177.
- Lagrange, J.B., (2005), The didactical challenge of symbolic calculators, Mathematics Education Library, Vol. 36, pp. 113-135.
- Mariotti M. A. (2002a), Influence of technologies advances on students' math learning, in Bartolini Bussi M. G., Jones G., Lesh R., & Tirosh D. (eds.), Handbook of International Research in Mathematics Education, Lawrence Erbaum Associates.
- Mariotti M. A. (2002b), La discussione matematica: formazione e pratica professionale dell'insegnante, XXIII Convegno Umi-Ciim, L'insegnante di Matematica nella scuola d'oggi: Formazione e pratica professionali.
- Mariotti, M. A. (2004), Strumenti antichi e moderni nell'educazione matematica. Ricordando Franco Conti, Scuola Normale Superiore, Pisa, 41–60.
- Mason, J. (1991), Questions about geometry, in D. Pimm and E. Love (eds.), *Teaching and Learning Mathematics: A Reader*, Holder and Stoughton, London, pp. 77–99.
- Norman, D. A., (1993), Le cose che ci fanno intelligenti. Il posto della tecnologia nel mondo dell'uomo, Milano, Feltrinelli.

- Noss R. (1995), Thematic Chapter: Computers as Commodities, in diSessa A.A., Hoyles C. , Noss R. (eds): Computers and exploratory learning, Nato Asi Series F, Vol. 146, Berlin: Springer Verlag, pp. 363-381.
- Noss, R., 2001, For a learnable mathematics in the digital culture, in ESM, 48, n. 1, pp. 21-46.
- Noss, R., Hoyles, C., Mavrikis, M., Geraniou, E., Gutierrez-Santos, S., & Pearce, D. (2009), Broadening the sense of "dynamic": a microworld to support students' mathematical generalization, Zdm, 41(4), pp. 493-503.
- Rabardel, P., (1995), Les homes et les technologies, Paris: Amand Colin.
- Ruthven, K. & Hennessy, S. (2002), A practitioner model of the use of copmuter-based tools and resurces to support mathematics teaching and learning, Educational Studies in Mathematics, 49, pp. 47-88.
- Simpson, A. (1995), 'Developing a proving attitude', *Conference Proceedings: Justifying and Proving in School Mathematics*, Institute of Education, University of London, London, pp. 39–46.
- Skempt R., 1976, Relational understanding and instrumental understanding, mathematics teaching, 77, pp. 20-26.
- Spagnolo, F. (1997), L'analisi a-priori e l'indice di implicazione statistica di Gras. Quaderni di Ricerca in Didattica, (7), pp. 110–117. http://math.unipa.it/~grim/ spagnolo_apriori_it_quad7_97.pdf
- Spagnolo, F. (2005), L'Analisi Statistica Implicativa: uno dei metodi di analisi dei dati nella ricerca in didattica delle Matematiche Introduzione. Quaderni di Ricerca in Didattica Supplemento n.2 al N.15- Palermo, pp. 35-51.
- Taylor, R. (1980), The Computer in the School: Tutor, Tool, Tutee. Computer, pp. 1-10. http://www.citejournal.org/articles/v3i2seminal1. pdf
- Trouche, L. (1996), A propos de l'apprentissage des limites de fonctions dans un environnement calculatrice: étude des rapports entre processus de

conceptualisation et processus d'instrumentalisation. Doctoral Thesis, Montpellier II, IREM de Montpellier.

- Verillon, P. and Rabardel, P. (1995), Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity, European Journal of Psychology in Education 9(3): pp. 77–101.
- Vinner, S. (1992), Function concept as prototype for problems in mathematics, G. Harel-E. Dubinsky (a cura di), "The concept of Function: aspects of Epistemology and Pedagogy", MAA Notes, 25, pp. 195-213.
- Vygotskij, L. S. (1962), Thought and Language, (traduzione italiana: Pensiero e Linguaggio, Laterza, Roma-Bari 2008).
- Vygotskij, L. S. (1978), Mind in Society: the Development of higher psychological Processes and Learning, Harvard University Press.
- Wartofsky, M. (1979), Perception, Representation, and the Forms of Action: Towards ad Historical Epistemology, in Models. Representation and the scientific understanding, D. Reidel Publishing Company, pp. 188-209.
- Winslow, C. (2000), Linguistic aspects of computer algebra system in higher mathematics education, in Nakahara & Koyama (eds), Proceedings of PME 24, Hiroshima, v. 4, pp. 281-288.